# Déséquilibre de marché et reproduction dans un modèle classique bisectoriel

**Carlo Benetti, Christian Bidard, Edith Klimovsky et Antoine Rebeyrol**

(version provisoire)

## 1 Introduction

Nous proposons un modèle classique de reproduction qui tente de s'affranchir de la tradition consistant à limiter aux situations d'équilibre le champ de la théorie économique. Dans ce but, nous fournissons une formalisation commune à l'équilibre et au déséquilibre qui intègre un mécanisme d'échange et de formation des prix de marché.

L'école classique conçoit la société capitaliste comme une société asymétrique où la marche de l'activité économique est le résultat des décisions d'accumulation des capitalistes qui contrôlent le processus de production, les travailleurs n'ayant qu'un rôle passif. Ces décisions sont évaluées objectivement par les prix et les taux de profit réalisés. Le modèle propose une formalisation de cette caractéristique centrale de l'économie de marché. Les décisions d'accumulation sont prises à partir de prix anticipés et se traduisent par des offres et demandes effectives de moyens de production, d'où résultent les prix de marché et l'allocation sectorielle des inputs. La production et les taux de profit effectifs sont ainsi déterminés quel que soit l'état de compatibilité des plans. A leur tour, les prix de marché sont la base à partir de laquelle les capitalistes anticipent les prix à la période suivante et prennent de nouvelles décisions d'accumulation. Cette représentation du processus marchand confère au modèle sa structure dynamique.

Dans les sections 2-5, nous présentons le cadre général d'analyse, dégageons les propriétés du modèle, dont on fournit une illustration graphique, et précisons les notions d'équilibre et de déséquilibre. Les sections 6 et 7 étudient la dynamique du déséquilibre en longue période et les cycles. L'annexe examine certaines différences avec la tradition walrassienne.

## 2 Un modèle de reproduction

Nous considérons une économie réelle sans monnaie composée de deux secteurs de production simple avec rendements d'échelle constants et une technique donnée, et dans laquelle par hypothèse les agents forment tous la même anticipation de prix. Dans ces conditions, tous les producteurs d'un même secteur peuvent être agrégés en un seul agent. Le salaire réel étant supposé donné, le travail est remplacé par le panier de biens-salaire correspondant et n'apparaît pas explicitement.

Les deux piliers du modèle sont le calcul du producteur individuel et la formation du prix de marché. A une certaine date 0 (fin de la période -1 notée "-" et début de la période 0), le producteur dispose de la production de la période $-1$ qu'il se propose de convertir en inputs pour la production de la période qui s'ouvre. Conformément à un objectif souvent retenu dans la tradition classique et marxiste, on suppose qu'il souhaite accumuler tout son profit (c'est-à-dire que la consommation finale désirée par les capitalistes est nulle). Avant l'échange, il anticipe les prix de marché sur la base desquels il prévoit le montant de ses propres profits et détermine en conséquence son plan de production pour la période qui commence. En particulier, il détermine les montants d'inputs qui lui seront nécessaires pour réaliser ce plan. Il retient alors la partie de sa propre production qu'il entend utiliser comme input et apporte le reste au marché pour l'échanger contre l'autre input. Sous l'hypothèse d'apurement du marché, il en résulte un prix relatif de marché à la date 0, qui est déterminé par le rapport des quantités apportées au marché. Après le marché, chaque producteur dispose d'un stock d'inputs composé de la part de son propre produit qu'il s'est réservée et de la quantité de l'autre bien qu'il a achetée. Compte tenu de la technique disponible, à facteurs complémentaires, il est possible que ces inputs ne soient pas entièrement utilisables dans la production. Nous supposons que les biens ne sont pas stockables et que les producteurs peuvent se défaire sans coût de l'éventuel excès de bien inutilisable comme moyen de production, par exemple en le consommant. Le reste est utilisé productivement conjointement à l'autre input et donne naissance à une production, et ceci dans chaque secteur. Nous allons suivre l'évolution de l'économie sur une période, en prenant comme données la production antérieure et les prix anticipés.

Pour $i$ =1,2, notons $(a_{ii}, a_{ij})$ les quantités positives d'inputs $i$ et $j$ nécessaires pour produire une unité de bien $i$. La matrice $\mathbf{A}$ =$[a_{ij}]$ est supposée productive, c'est-à-dire que sa production nette est positive pour des niveaux d'activité bien choisis. La quantité disponible de bien $i$ à la date 0 est notée $q_i^-$, celle qui sera produite pendant la période qui commence étant notée $q_i$. Les prix effectifs à la date 0 sont notés $p_i$ et $p_j$, seul le prix relatif $p_{ij} = p_i/p_j$ étant pertinent en l'absence de monnaie. Mais le plan de production étant conçu avant l'échange effectif sur le marché, le producteur se fonde pour l'établir sur des prix anticipés pour le marché qui va s'ouvrir, de même qu'il anticipe la quantité à produire dans la période. L'indice supérieur $a$ se rapporte aux prix et quantités anticipés.

Le modèle se compose des équations suivantes :

$$q_i^- = q_i^a(a_{ii} + a_{ij}p_{ji}^a) \tag{1}$$

$$p_{ij} = \frac{q_j^- - q_j^a a_{jj}}{q_i^- - q_i^a a_{ii}} \tag{2}$$

$$q_i = \min\left\{q_i^a, \frac{q_j^- - q_j^a a_{jj}}{a_{ij}}\right\} \tag{3}$$

L'équation (1) décrit le calcul du producteur. A la date 0, mais avant la tenue du marché, le capitaliste $i$ (celui qui produit le bien $i$) dispose de la production $q_i^-$, et il anticipe le prix relatif $p_{ij}^a$. Sur cette base, il évalue son taux de profit anticipé comme rapport entre les valeurs anticipées du produit et des inputs utilisés (ou coût de remplacement). C'est en effet ce rapport, et non celui entre la valeur du produit et son coût historique, qui permet d'évaluer la capacité de reproduction du capital. Dans l'hypothèse de rendements d'échelle constants, ce calcul est représenté par l'équation

$$1 = R_i^a(a_{ii} + a_{ij}p_{ji}^a) \tag{4}$$

où $R_i^a = 1 + r_i^a$ est le facteur de profit anticipé.

Poursuivant l'objectif d'accumulation maximale, il prévoit de produire $q_i^a = q_i^- R_i^a$. A cet effet, il retient la quantité $q_i^a a_{ii}$ de son propre produit et cherche à acquérir sur le marché la quantité $d_j = q_i^a a_{ij}$ de l'input $j$ complémentaire dans la proportion dictée par sa technique. Il apporte donc au marché la quantité $o_i = q_i^- - q_i^a a_{ii}$ de bien $i$ de valeur totale anticipée $(q_i^- - q_i^a a_{ii})p_i^a$, contre laquelle il espère obtenir la quantité $q_i^a a_{ij}$ de bien $j$ de valeur anticipée $q_i^a a_{ij} p_j^a$. Ainsi les anticipations de prix déterminent la production anticipée $q_i^a$ par la formule $(q_i^- - q_i^a a_{ii})p_i^a = q_i^a a_{ij} p_j^a$, (équation 1) qui, à son tour, se traduit directement en plans d'échange respectant la contrainte de budget anticipée :

$$o_i p_i^a = d_j p_j^a \qquad i, j = 1, 2 \tag{5}$$

Il en résulte les quantités effectives apportées au marché, $o_i$ de bien $i$ et $o_j = q_j^- - q_j^a a_{jj}$ de bien $j$. Sous l'hypothèse retenue d'apurement du marché, le prix effectif $p_{ij}$ à la date d'échange est déterminé par le rapport inverse des quantités des biens apportés au marché, comme l'indique l'équation (2).

Chaque capitaliste retire donc du marché ce que l'autre y apporte. Après cet échange marchand, le capitaliste $i$ dispose de la quantité $q_i^a a_{ii}$ de son propre produit et de la quantité $q_j^- - q_j^a a_{jj}$ offerte par l'autre capitaliste. Sauf dans le cas exceptionnel d'anticipations parfaites, la quantité obtenue de l'autre bien $j$ diffère de celle attendue. En conséquence, ces quantités ne sont pas dans les proportions requises pour la production, l'un des inputs étant en excès relatif et l'autre étant "rare". Pour le capitaliste $i$, la proportion demandée pour la production est $a_{ii}/a_{ij}$, donc, de *son* point de vue, l'input rare est celui pour lequel la contrainte technique est serrée, c'est-à-dire celui dont la quantité réalise l'égalité dans l'expression (équivalente à (3)) :

$$q_i = \min \left\{ \frac{q_i^a a_{ii}}{a_{ii}}, \frac{o_j}{a_{ij}} \right\} \tag{6}$$

car c'est cet input qui limitera sa production (ce peut être $i$ ou $j$). Toujours du point de vue du capitaliste $i$, l'autre input est abondant. On suppose que l'excès de cet input est détruit, par exemple par la consommation finale, et que le reste est utilisé productivement, ce qui détermine la production effective de bien $i$. Le niveau de la production effective $q_i$ de bien $i$ est donc donné par l'équation (3).

On remarque qu'un capitaliste n'est jamais amené à produire plus que sa production anticipée : $q_i \leq q_i^a$. La raison en tient à ce qu'il ne dispose d'input de son propre produit que dans la quantité déterminée par son plan de production. Le plan du capitaliste $i$ est effectivement réalisé si l'autre input $j$ est abondant, c'est-à-dire si le capitaliste $i$ a retiré du marché plus (ou du moins autant) de cet input qu'il n'en espérait. Dans le cas contraire, où il en retire moins qu'attendu, il est contraint de réviser à la baisse son plan de production, et c'est alors le second argument de la fonction $\min\{\cdot,\cdot\}$ de l'équation (3) ou (6) qui importe.

Dès lors que les anticipations des deux capitalistes sur le rapport d'échange sont supposées identiques, l'écart entre le rapport anticipé et le rapport effectif est de même sens pour les deux capitalistes. C'est-à-dire que l'un retire plus de l'autre bien qu'il n'en attendait (c'est alors la possession de son propre bien qui limitera sa production) et l'autre en retire moins qu'attendu. Pour ce dernier, la rareté de l'autre input est effective. Remarquons que les deux agents s'accordent (pour la période considérée) sur la classification entre "bien rare" et "bien surabondant", c'est-à-dire que la condition (6) ne définit pas la rareté ou l'abondance du seul point de vue du capitaliste $i$, mais pour tous les deux : pour la période considérée, il est donc légitime de parler de bien rare dans l'absolu. Ce bien est en fait celui qui est vendu relativement plus cher qu'il n'était anticipé, et c'est pourquoi l'autre capitaliste en obtient moins que la quantité attendue.

Le capitaliste qui produit le bien surabondant (c'est-à-dire dont le prix relatif est plus faible que celui anticipé) et demande le bien rare est contraint de réduire sa production effective par rapport à la production anticipée. En revanche, le producteur de la marchandise rare réalisera un taux de croissance dans la période qui s'ouvre égal au taux de profit qu'il avait anticipé. Il est vrai qu'il s'est trompé dans ses anticipations de prix et a sous-estimé le taux de profit qu'il réalise. Mais cette aubaine ne peut être convertie en investissement supplémentaire, et l'accumulation physique réalisée, donc le taux de croissance de la période, est conforme aux anticipations.

Par définition, nous qualifions de *rare* la marchandise dont le prix de marché est supérieur à celui qui avait été anticipé, et de surabondante celle que les producteurs avaient au contraire surévaluée. Rareté et surabondance ne sont pas des propriétés purement objectives des marchandises : la connaissance des quantités produites et des techniques de production ne suffit pas à les déterminer, même dans ce cadre où les agents désirent une accumulation maximale, tant que l'on ne connaît pas le niveau du prix relatif anticipé.

Cette définition de la rareté s'explique aussi par le fait que la marchandise rare est en excès de demande (et la marchandise surabondante en excès d'offre). Compte tenu des deux contraintes anticipées $o_i p_{ij}^a = d_j$ (d'où par sommation la loi de Walras $(d_i - o_i)p_{ij}^a + (d_j - o_j) = 0$, et par division l'égalité $\frac{o_i}{d_i} = \frac{d_j}{o_j}$) et du prix de marché $p_{ij} = \frac{o_j}{o_i}$, on obtient:

$$p_{ij} \gtreqless p_{ij}^a \qquad \Leftrightarrow \qquad d_i \gtreqless o_i \qquad \Leftrightarrow \qquad o_j \gtreqless d_j$$

En utilisant les indices $r$ pour la marchandise rare et $s$ pour celle qui est surabondante, on obtient des relations plus précises entre offres, demandes et prix relatif :

$$\frac{o_s}{o_r} = \frac{p_r}{p_s} \geq \frac{p_r^a}{p_s^a} = \frac{o_s}{d_r} = \frac{d_s}{o_r} \geq \frac{d_s}{d_r} \tag{7}$$

En résumé, sur la base des quantités produites et disponibles à une certaine date et des prix anticipés, les capitalistes forment des plans de production, celui du producteur $i$ étant donné par la relation (1) (et de même pour l'autre producteur). Afin de réaliser ce plan, les capitalistes gardent une partie de leur propre input et apportent le reste au marché. L'apurement du marché détermine le prix effectif (voir l'équation (2) et cet échange permet à chacun d'eux de se fournir en l'input complémentaire. En règle générale l'un des biens est en offre surabondante par rapport aux plans de production, tandis que l'autre, ou bien rare, n'est pas disponible dans la quantité désirée. Le déséquilibre n'est pas de même nature pour chacun. Le producteur du bien surabondant doit effectivement revoir à la baisse son plan de production, tandis que le producteur du bien rare pourra réaliser le sien. Les quantités qui seront effectivement produites dans la période qui s'ouvre sont données par l'équation (3).

# 3 Représentation graphique

Le modèle peut être visualisé au moyen d'une boîte d'Edgeworth telle que représentée sur la figure 1. En situant l'origine des axes respectivement aux coins sud-ouest et nord-est pour les secteurs 1 et 2, la taille de la boîte est déterminée par les quantités existantes $q_1^-$ et $q_2^-$. Les techniques de production sont représentées respectivement par la droite OE de pente $a_{12}/a_{11}$ (pour la production du bien 1) et par O'F de pente $a_{21}/a_{22}$ (pour celle du bien 2). Les quantités initiales sont représentées par le point I (le coin sud-est). Pour un vecteur $p^a$ de prix anticipés, la contrainte de budget anticipée est la droite passant par I orthogonale à ce vecteur, et les capitalistes 1 et 2 prévoient d'utiliser les quantités d'inputs représentées respectivement aux points B et C. Le plan du producteur 1 est d'échanger la quantité $o_1$ de bien 1 contre la quantité $d_2$ de bien 2, telles qu'elles apparaissent sur la figure. De même, le plan du producteur 2 est d'offrir la quantité $o_2$ de bien 2 contre celle $d_1$ de bien 1.

Les relations entre les grandeurs qui apparaissent sur la Figure 1 et les équations du paragraphe précédent sont immédiates : les coordonnées du point B (respectivement C) sont les demandes d'inputs anticipées $(q_1^a a_{11}, q_1^a a_{12})$ (respectivement $(q_2^a a_{21}, q_2^a a_{22})$. Les points B et C sont situés à l'intersection de la droite de budget anticipée et respectent les proportions requises entre les inputs de chaque secteur. Ils correspondent donc aux inputs requis pour l'accumulation maximale anticipée en vue de produire $q_i^a$ $(i = 1, 2)$ défini par l'égalité (1). L'offre $o_i$ de bien $i$ est la différence entre la quantité existante de bien $i$ et celle que le capitaliste $i$ prévoit d'utiliser : $o_i = q_i^- - q_i^a a_{ii}$. La demande $d_i$ de bien $i$ émane de l'autre producteur $j$ et résulte de son niveau de production anticipé : $d_i = q_j^a a_{ji}$. En général le prix réalisé sera différent du prix anticipé $(p \neq p^a)$ : parce que le modèle ne prévoit aucune coordination *a priori* des plans, il en résulte une situation de déséquilibre où l'allocation sanctionnée par le marché diffère de celle que les agents avaient prévue. Les prix et quantités lors de l'échange effectif diffèrent de ceux que les agents avaient intégrés à leur contrainte de budget anticipée : il y a déséquilibre malgré l'apurement du marché.

L'équation (2), où le membre de droite est le rapport des offres, montre que le prix de marché se forme à travers l'échange des quantités apportées au marché. Sur la Figure 1, le point A représente l'allocation qui résulte de l'échange de ces quantités offertes. Le prix de marché est donc représenté par la pente du segment IA, qui diffère de celle de la droite IC qui reflète le prix anticipé. Le mécanisme de marché ici envisagé détermine simultanément le prix et l'allocation des agents.

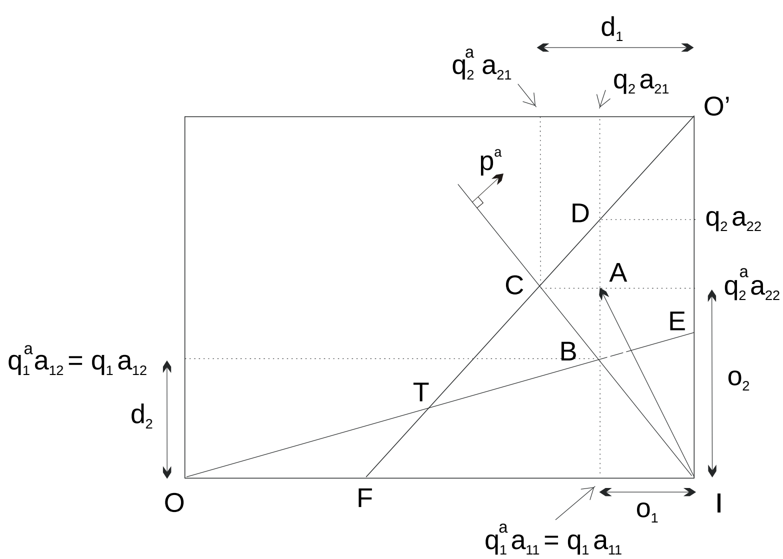


Figure 1: figure 1

La figure représente une situation typique où les plans des agents ne sont pas compatibles. Plus précisément, le bien 1 est en excès de demande $(d_1 > o_1)$

et constitue le bien rare, alors que le bien 2 est surabondant ($d_2 < o_2$). Les inégalités (7) sont directement lisibles, en comparant les pentes des droites IB et IA, de même que la loi de Walras et l'égalité $\frac{o_1}{d_1} = \frac{d_2}{o_2} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}$. Le producteur 1 réalise donc son plan et se situe au point B, dont les coordonnées représentent les quantités qu'il utilisera productivement. Le producteur 2 est contraint sur le marché du bien 1 du fait que la quantité disponible de ce bien est égale à $o_1$, avec $o_1 < d_1$. Il va donc se situer au point D. Le bien rare 1 est totalement utilisé dans la production (la somme de abscisses de B et D, lues dans leurs axes respectifs, est égale à la quantité totale $q_1^-$ disponible). Par contre, une partie du bien surabondant, représentée par l'écart vertical entre les points B et D, est dépensée improductivement, BA pour le secteur 1 et DA pour le secteur 2.

Synthétisons les propriétés du modèle de reproduction que nous avons illustrées :

(a) La marchandise rare, sous-évaluée par les producteurs, est en excès de demande, l'autre en excès d'offre.

(b) Le plan de production est réalisé dans le secteur qui produit la marchandise rare tandis qu'il est révisé à la baisse dans l'autre secteur.

(c) La marchandise rare est entièrement accumulée, tandis que l'autre marchandise est partiellement inutilisée.

(d) Pour le producteur de la marchandise rare, le taux de profit anticipé est égal au taux de croissance réalisé dans la période.

Il reste à examiner une dernière propriété utile pour l'étude dynamique.

# 4 Taux de profit et taux de surplus

Nous présentons ici une propriété particulièrement importante du modèle qui s'exprime indifféremment par une relation entre prix et niveaux d'activité ou entre taux de profit et taux de surplus. Nous montrons ensuite que cette dernière relation est une illustration particulière d'une propriété inhérente aux définitions de ces taux.

L'accumulation totale de la marchandise rare (propriété c) s'écrit $q_r a_{rr} + q_s a_{sr} = q_r^-$ et, puisque $q_r = q_r^a$, d'après (1) on a $q_r a_{rr} + q_s a_{sr} = q_r(a_{rr} + a_{rs}\frac{p_s^a}{p_r^a})$. La relation obtenue après simplification étant symétrique en $r$ et $s$, il est inutile de maintenir la distinction entre les deux marchandises :

$$\frac{q_i}{q_j} = \frac{a_{ji}}{a_{ij}} p_{ij}^a \tag{8}$$

c'est-à-dire :

(e) La proportion entre les productions disponibles à la date 1 ne dépend *que* du prix anticipé à la date 0.

La relation (8) exprime l'équivalence aux prix anticipés des utilisations productives effectives, par chaque secteur, des inputs procurés par l'autre secteur. Elle ne doit pas être confondue avec la relation d'échange qui exprime quant à elle l'équivalence *au prix de marché* des inputs *échangés* entre les secteurs.

Dans notre modèle, comme on l'a vu, sauf hasard le prix de marché diffère du prix anticipé et le producteur du bien rare ne pourra pas utiliser productivement la totalité de l'autre bien qu'il a obtenue sur le marché. Sur la figure 1, la relation d'échange est représentée par le segment IA tandis que la relation (8) ici discutée l'est par le segment IB. Elle fait voir que l'utilisation (partielle) du bien surabondant disponible dans le secteur $r$ (soit la quantité $q_1 a_{12} = d_2$ sur la Figure 1) a la même valeur anticipée que l'utilisation (intégrale) du bien rare dans le secteur $s$ (soit que la quantité $q_2 a_{21} = o_1$ sur la figure 1).

Outre la symétrie entre les biens $i$ et $j$, l'autre caractère remarquable de la propriété (e) est qu'elle établit une relation linéaire croissante simple entre le prix relatif anticipé juste avant le marché de la date 0 et la proportion des productions que l'allocation qui résulte du marché permettra de mettre en oeuvre entre les dates 0 et 1. Elle sera particulièrement utile dans l'étude dynamique qui va suivre.

Une expresssion alternative de la propriété (e) est :

(e') Les taux de profit anticipés à une certaine date sont égaux aux taux de surplus qui seront réalisés à la période qui s'ouvre.

Appelons *facteur de surplus* $S_i$ de la marchandise $i$ sur une période le rapport entre la quantité produite de cette marchandise en fin de période et la quantité totale investie de cette marchandise en début de période :

$$S_i = \frac{q_i}{q_i a_{ii} + q_j a_{ji}} \tag{9}$$

En faisant apparaître dans cette expression le rapport $q_i/q_j$ et en le substituant par le membre de droite de (8) où intervient le prix relatif anticipé, nous obtenons l'expression (4) du taux de profit anticipé :

$$R_i^a = S_i \quad (i = 1, 2) \tag{10}$$

Cette égalité est une illustration particulière d'une propriété générale qui résulte des définitions du taux de profit et du taux de surplus :

(f) Taux de profit et taux de surplus sont, tout comme les quantités et les prix, des notions duales.

Cette propriété, quoique de portée générale dans la théorie classique, n'y a pas été dégagée, à notre connaissance, lorsque les taux ne sont pas uniformes.

Rappelons les définitions du facteur de profit sectoriel, calculé au coût de remplacement,

$(a_{ii}p_i + a_{ij}p_j)R_i = p_i$

et du facteur de surplus d'une marchandise

$(q_i a_{ii} + q_j a_{ji})S_i = q_i$

La similitude formelle entre ces équations est évidente : elles sont en fait identiques après remplacement des prix par les quantités, des taux de profit par les taux de surplus et de $a_{ij}$ par $a_{ji}$, c'est-à-dire après transposition de la matrice des $\{a_{ij}\}$. C'est ce parallélisme qui est désigné comme dualité entre prix et quantités, entre taux de profit et taux de surplus[1].

[1] Dans un modèle à $n$ biens, la dualité apparaîtrait à travers les relations matricielles

Partant de la première égalité relative à l'industrie 1, on peut exprimer le prix relatif en fonction du facteur de profit dans l'industrie 1. On peut de même l'exprimer en fonction du taux de profit dans l'industrie 2. En éliminant le prix relatif entre ces deux égalités, on fait apparaître une relation $h$ entre $R_1$ et $R_2$ :

$$h(R_1, R_2) = a_{11}R_1 + a_{22}R_2 - \delta R_1 R_2 - 1 = 0 \tag{11}$$

où $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det[a_{ij}]$. L'égalité (11) exprime une relation homographique décroissante entre les taux de profit sectoriels, relation dont la concavité dépend du signe du déterminant.

Cette relation a ceci de remarquable qu'elle ne dépend que des termes diagonaux et du déterminant de la matrice $\mathbf{A}$ des coefficients techniques, qu'elle ne dépend pas par conséquent de ce que l'on raisonne sur $\mathbf{A}$ ou sur sa transposée. De ce fait, on retrouve la même relation homographique entre les taux de surplus. Sans qu'il soit nécessaire de refaire les calculs, on déduit directement de la propriété de dualité que l'élimination des quantités relatives entre les expressions des facteurs de surplus des biens 1 et 2 conduit à la même relation $h(\cdot, \cdot) = 0$ que celle qui lie entre eux les taux de profit :

$$h(S_1, S_2) = 0 \tag{12}$$

i.e. $a_{11}S_1 + a_{22}S_2 - \delta S_1 S_2 - 1 = 0$. Il en résulte, par exemple, que si $R_1 = S_1$, alors $R_2 = S_2$.

Compte tenu de leur définition en fonction des prix anticipés (voir (4)), il est immédiat que la relation $h$ lie également entre eux les taux de profit anticipés : $h(R_1^a, R_2^a) = 0$.

On obtient une démonstration alternative de l'égalité (10) de notre modèle en considérant le cas de la marchandise rare. Le facteur de surplus d'une marchandise est égal au rapport entre sa production à la date 1 et sa quantité totale utilisée en input à la date 0, qui pour la marchandise rare coïncide avec la quantité disponible en 0. Donc, pour cette marchandise, le facteur de surplus est le taux de croissance entre les dates 0 et 1. D'après la propriété (d) ci-dessus, c'est aussi le taux de profit anticipé dans ce secteur, d'où l'égalité $R_r^a = S_r$. En raison de l'identité de la relation homographique décroissante $h(S_r, S_s) = 0 = h(R_r^a, R_s^a)$, cette égalité vaut aussi pour le secteur produisant le bien surabondant $R_s^a = S_s$, d'où la relation (10). En développant cette formule (10) et en la simplifiant, on peut vérifier qu'elle est équivalente à (8).

# 5 Equilibre et déséquilibre

Après avoir distingué deux notions d'équilibre et précisé celle qui est significative pour notre modèle, nous justifions la notion de déséquilibre.

$\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{p}$ et $\mathbf{q}\mathbf{A}\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{q}$, où $\hat{\mathbf{R}}$ et $\hat{\mathbf{S}}$ figurent les matrices carrées composées respectivement sur la première diagonale des facteurs de profit sectoriels et des taux de surplus des biens, et de zéros ailleurs.

## 5.1 Equilibre de la période et équilibre complet

Une première notion d'équilibre est celle qui correspond à la réalisation sur la période du prix relatif anticipé $p = p^a$ (qui implique l'égalité de l'offre et de la demande). Graphiquement sur la figure (1), on a $p = p^a$ si la pente représentative de $p^a$ est celle du segment IT. Aucune marchandise n'étant sur- ou sous-évaluée, les plans d'échange et de production sont tous réalisés, et il n'y a plus de marchandise rare ou surabondante. Les inégalités de la section 2 sont remplacées par des égalités et toutes les propriétés énoncées sont vérifiées dans les deux secteurs, les arguments des fonctions $\min\{\cdot,\cdot\}$ étant égaux entre eux.

S'il entraine la réalisation des taux de profit anticipés, l'équilibre de la période n'implique nullement l'égalité de ces taux de profit. On obtient l'équilibre complet lorsque cette dernière égalité est vérifiée elle aussi, ce qui implique une proportion entre les productions des deux secteurs telle que les taux de surplus sont égaux. A l'équilibre complet le système conserve cette proportion et se reproduit à l'homothétique. Les sections 6 et 7 étudient la convergence vers cet équilibre.

L'équilibre de la période évoque alors l'équilibre temporaire hicksien. Dans les deux cas tous les plans individuels de la période sont réalisés et seront modifiés à la période suivante. Toutefois, il y a deux différences importantes avec la tradition hicksienne. D'une part les plans de la période tiennent compte des anticipations, en général erronées, pour toutes les périodes suivantes chez Hicks, tandis que, dans notre modèle, ils dépendent de l'anticipation, vérifiée, du prix de la seule période courante. D'autre part, nous ne supposons pas l'existence sous-jacente d'un processus stable d'ajustement des offres et des demandes agrégées (le tâtonnement walrassien du lundi chez Patinkin, dont la stabilité sera discutée dans l'annexe 1). Dans notre modèle au contraire, l'équilibre dans la période ne se réalise que par pur hasard. C'est pourquoi cet équilibre ne jouera aucun rôle dans la dynamique qui n'est pas une suite d'équilibres de la période mais une dynamique du déséquilibre.

Le déséquilibre est caractérisé par un rationnement de la demande du producteur de la marchandise surabondante. Celui-ci résulte du mécanisme de marché qui détermine à la fois le prix et l'allocation et en aucune façon d'un schéma arbitraire de rationnement qui, dans ce modèle, serait dépourvu de tout objet.

## 5.2 Déséquilibre et formation du prix de marché

Le fait que tous les producteurs se débarrassent de la même marchandise et utilisent entièrement l'autre (propriété (c)) implique que l'allocation A (figure 1) qui résulte du marché est efficiente[2] : on ne pourrait améliorer la situation dans un secteur qu'en lui procurant de la marchandise rare au détriment de l'autre secteur. Pourtant, les agents ne sont pas confrontés au même type de déséquilibre. Les producteurs de la marchandise surabondante ne réalisent pas

[2] Sur la figure 1, l'ensemble des allocations efficientes est représenté par les surfaces des deux triangles OFT et O'ET.

leur plan de production car ils n'ont pas obtenu la quantité qu'ils souhaitaient de l'autre marchandise. Par conséquent, ils ont retenu une quantité de leur marchandise qui se révèle excessive et dont il doivent se défaire. La situation est différente pour les producteurs de la marchandise rare, qui réalisent au contraire leur plan de production. Le marché leur a réservé une bonne surprise puisque leur marchandise vaut plus qu'ils ne l'avaient prévu. Ce profit d'aubaine prend cependant la forme d'une quantité du bien $s$ qu'ils ne pourront utiliser. Comme les producteurs de l'autre secteur, ils sont incités à rouvrir le marché mais si celui-ci rouvrait, ils seraient alors tous offreurs de la marchandise surabondante dont le prix s'annulerait. La détention imprévue de ce bien, de fait sans valeur, est la forme sous laquelle se manifeste pour eux le déséquilibre.

De notre point de vue, l'idée essentielle à exprimer est qu'en déséquilibre l'agent obtient un panier de biens qui diffère, en moins ou en plus, de ce qu'il avait prévu. Le déséquilibre que l'on vient de décrire est la conséquence de l'équation (2) qui représente le mécanisme par lequel se forme le prix de marché. Ce mécanisme diffère fondamentalement de la représentation qui s'est imposée après Walras. Il implique que les agents ignorent les prix au moment où ils décident irrévocablement de leur engagement quantitatif sur le marché, ce qui se heurte à l'objection évidente selon laquelle on connaît le prix du paquet de café lorsqu'on s'apprête à le payer devant la caisse de l'épicier. C'est d'ailleurs bien pourquoi on n'obtiendra pas plus de café qu'on n'en demande, alors que cela serait possible dans notre modèle, comme l'illustre la situation du producteur de la marchandise rare. Cela peut apparaître comme une violation de l'idée d'échange volontaire.

Cette demande de café n'est pourtant pas significative : en sortant de l'épicerie, on peut bien découvrir que la boulangerie brade ses chocolats et, en rentrant chez soi, on ramènera donc éventuellement plus de café que ce que l'on aurait demandé si l'on avait connu le vecteur des prix effectifs. Walras nous a appris qu'en droit, la demande de café n'est pas plus fonction du prix du café que du prix de n'importe quel autre de tous les biens existants. Elle dépend fondamentalement du *vecteur* complet des prix. Or, chez l'épicier, lorsque nous achetons irrévocablement notre café, nous n'avons guère qu'une anticipation de ce vecteur de prix. Pour une modélisation du marché qui doit nécessairement choisir les traits de la réalité qu'elle met entre parenthèses, les jugeant *a priori* moins significatifs que d'autres pour son propos, il nous semble que l'abstraction ici adoptée, à savoir l'hypothèse que les décisions de dépenses sont prises sur la base d'une anticipation (en général erronée) des prix de marché, est moins exorbitante et moins dommageable que l'hypothèse inverse de la théorie de l'équilibre général, selon laquelle ces décisions sont prises en connaissant avec certitude le vecteur entier des prix de marché.

L'abstraction impliquée par l'équation (2) est justifiée non seulement par le fait qu'elle nous semble plus raisonnable que celle de Walras, mais surtout par l'impossibilité pour la théorie walrassienne de traiter les situations de déséquilibre. Supposons que le prix $p^a$ soit crié par un secrétaire de marché et que les échanges aient lieu en déséquilibre à ce prix (comme par exemple dans les processus de Hahn). Les producteurs de la marchandise rare seraient en équilibre et toute la quantité de la marchandise surabondante qui n'est pas utilisée dans la production (le segment BD de la figure (1)) se trouverait dans les mains des producteurs de cette marchandise. Les quantités produites dans la période qui s'ouvre seraient les mêmes que celles que nous avons déterminées, mais on ignorerait tout du prix qui résulterait du déséquilibre et auquel auraient lieu les échanges à la date suivante. Ce prix est indéterminé, et la théorie walrassienne doit s'en remettre à la décision arbitraire du secrétaire de marché. D'un mot, dans cette théorie on ne sait pas ce que sont les prix en dehors de l'équilibre. Ce qui fait défaut est un mécanisme par lequel se fixe le prix en fonction des décisions d'échange des agents et indépendamment de leur volonté (comme l'exige l'hypothèse de concurrence selon laquelle le prix est un pur fait social qui échappe au pouvoir des agents individuels). L'équation (2) représente un tel mécanisme. Sans doute d'autres règles de formation du prix sont-elles envisageables. Celle que nous adoptons (dont l'origine remonte à Cantillon dans le cadre d'une économie avec monnaie, et qui est reprise par Smith) a le mérite de la simplicité. Sur la base du prix fixé par l'équation (2), les agents formeront leurs anticipations pour la période suivante et calculeront de nouveaux plans de production. Moyennant une hypothèse sur les anticipations des prix, il est alors possible d'étudier une dynamique du déséquilibre.

# 6 Dynamique du déséquilibre : le long terme

## 6.1 Anticipations et dynamique

Pour enchaîner les périodes et passer à l'étude dynamique, nous ajoutons une hypothèse relative à la formation des anticipations de prix. Ces dernières sont limitées à la période courante et supposées statiques : le prix relatif anticipé en $t$ est celui qui a été constaté sur le marché de la date $t-1$ :

$$p_{ij}^{a} = p_{ij}^{-} \tag{13}$$

Cette hypothèse d'anticipations statiques est retenue car elle a le mérite de la simplicité. Dans cette partie on choisit le bien 2 comme numéraire du prix relatif et comme unité de mesure des proportions de la production. On convient d'écrire $p = p_{12}((=\frac{p_1}{p_2}))$ et $q = \frac{q_1}{q_2}$. En éliminant les plans de production entre les équations (1) et (2), et en tenant compte de l'hypothèse (13), on obtient l'équation du prix relatif qui, avec (8), forme un système dynamique dans les prix et quantités relatives $p$ et $q$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{a_{21}}{a_{12}} \frac{p^-}{q^-} \frac{a_{11}p^- + a_{12}}{a_{21}p^- + a_{22}} \\ q = \frac{a_{21}}{a_{12}} p^- \end{array} \right. \tag{14}$$

Une rapide manipulation montre que la solution stationnaire $(\overline{p}, \overline{q})$ est constituée, respectivement, des uniques solutions positives des équations suivantes

:

$$\overline{p} = \frac{a_{11}\overline{p} + a_{12}}{a_{21}\overline{p} + a_{22}} \tag{15}$$

$$\overline{q} = \frac{a_{11}\overline{q} + a_{21}}{a_{12}\overline{q} + a_{22}} \tag{16}$$

Ces deux formules ne diffèrent que par l'interversion des termes $a_{12}$ et $a_{21}$. On voit que les prix $(\overline{p}, 1)$ et les quantités $(\overline{q}, 1)$ sont vecteurs propres de Perron-Frobenius, respectivement à droite et à gauche, de la matrice positive $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ des coefficients techniques. On rappelle que cette matrice $\mathbf{A}$ est supposée productive. Sa valeur propre dominante, notée $\alpha_1$, est donc comprise entre 0 et 1, et l'on a par définition :

$$\alpha_1 = a_{21}\overline{p} + a_{22} = a_{12}\overline{q} + a_{22}$$

La solution stationnaire correspond à l'équilibre complet du modèle, qui implique l'uniformité et l'égalité des facteurs de profit et de surplus, tous égaux à l'inverse de $\alpha_1$. De plus, toutes les quantités croissent, compte tenu de l'absence de consommation finale, homothétiquement au taux maximal $g_{\max} = \frac{1}{\alpha_1} - 1$. Il s'agit évidemment du "taux de croissance de von Neumann".

En dehors de cet équilibre complet, l'évolution des quantités n'est pas régulière et nous nous proposons d'étudier leur dynamique en la décomposant entre sa tendance de long terme et ses fluctuations autour de cette tendance. Nous réalisons d'abord quelques simulations sur la tendance, puis étudierons le cycle à la section suivante.

## 6.2 La tendance de long terme

En leur adjoignant l'hypothèse d'anticipation statique (13), les équations (1) à (3) permettent de simuler l'évolution temporelle des quantités produites. On sait que pour des proportions initiales $(p(0), q(0)) = (\overline{p}, \overline{q})$, les quantités initiales croîtront régulièrement au taux maximal $g_{\max}$. Les simulations suivantes sont obtenues avec une technologie pour laquelle $g_{\max} = 25$ %, $\overline{p} = 5/6$ et $\overline{q} = 1$. La première (figure 2) porte sur le logarithme des niveaux d'activité, avec les conditions initiales suivantes : $p(0) = \overline{p}$, $q_1(0) = 1,3$, $q_2(0) = 1$.

On constate que le taux de croissance moyen des deux secteurs est approximativement le même pourvu qu'il soit calculé sur un nombre suffisant de périodes, et que ce taux moyen est stable au cours du temps. L'égalité du taux de croissance de long terme des deux secteurs est facile à comprendre : il n'est en effet pas possible que le taux de croissance d'un secteur soit durablement supérieur à celui de l'autre, car les besoins d'inputs de la branche dynamique finiraient par excéder les quantités produites par l'autre branche. On peut donc parler d'un taux de croissance de l'économie à long terme, ou taux de croissance asymptotique.

Le taux de long terme obtenu sur la simulation précédente est bien sûr inférieur au taux maximal physiquement atteignable de 25 %. Nous nous proposons d'examiner l'influence des proportions initiales sur la dynamique de long

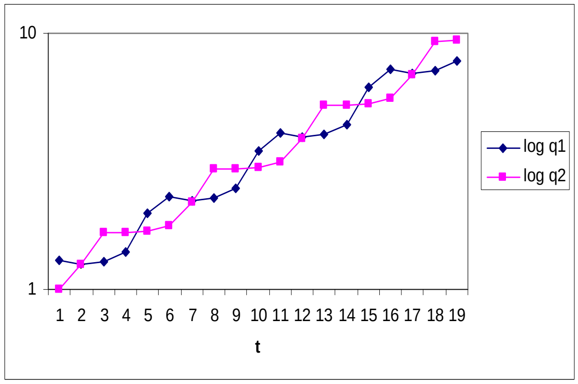


Figure 2: figure 2

terme : la simulation suivante (figure 3) est obtenue en modifiant uniquement la condition initiale $q_1(0)$, qui vaut maintenant 1,5 au lieu de 1,3.

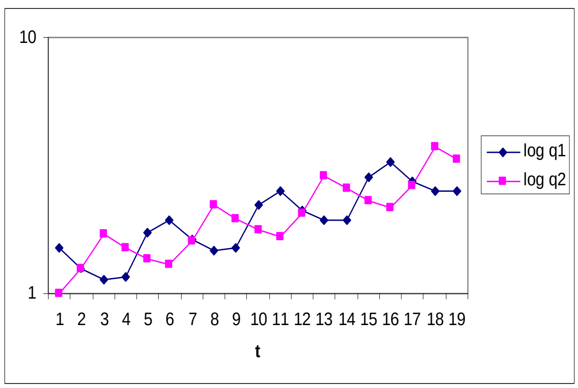


Figure 3: figure 3

On constate que la variance des quantités autour de leur tendance est accrue mais surtout, pour notre propos actuel, que le taux de croissance de long terme est diminué. Des résultats tout à fait analogues sont obtenus en écartant $p(0)$ plutôt que $q(0)$ de sa valeur stationnaire. La simulation suivante (figure 4) montre comment se modifie le taux de croissance de long terme, calculé sur mille périodes, en fonction de $q_1(0)$ (avec toujours $p(0) = 5/6$ et $q_2(0) = 1$).

Le taux de croissance atteint bien sa valeur maximale de 0,25 pour la valeur initiale $q_1(0) = q(0) = 1$, mais diminue en gros régulièrement lorsque l'on s'écarte, par le haut ou par le bas, de cette valeur initiale. Il peut parfaitement être négatif.

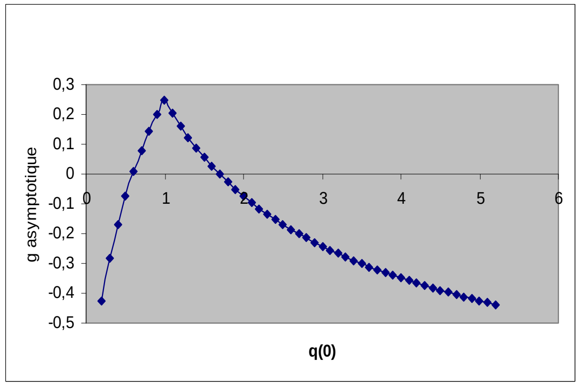


Figure 4: figure 4

Est ainsi mise en évidence une propriété tout à fait originale du modèle : *les chocs transitoires de productivité* - ce que les auteurs classiques appelaient "une bonne ou une mauvaise récolte" - *ont des effets permanents sur le taux de croissance de long terme.*

Ces résultats sur l'évolution de long terme des niveaux d'activité sont étonnants à cause de la stabilité du taux moyen de croissance qu'ils révèlent. Mais l'intuition économique de la variation de ce taux de croissance moyen et stable en fonction de l'écart initial à la solution stationnaire du système (14) est facile à saisir, à partir du moment où l'on a compris que la dynamique du déséquilibre impliquait d'exclure des marchandises de l'accumulation, comme on l'a vu dans les sections précédentes.

# 7 Dynamique du déséquilibre : le cycle

## 7.1 Dynamique des proportions

La simplicité du système dynamique (14) tient à ce qu'il ne porte que sur les prix relatifs et les proportions de la production. Sa seconde équation, qui n'est autre que (8), montre que ces proportions ne dépendent *que* des prix anticipés et non de l'autre donnée de la période, à savoir les quantités disponibles $q_i^-$ et $q_j^-$ des marchandises. Plus simple que les fonctions $\min\{\cdot,\cdot\}$, cette relation (8) autorise une étude dynamique des prix relatifs et des *proportions* de la production qui évite d'expliciter à chaque période quelles sont les marchandises rare et surabondante.

En éliminant $q$ entre les deux équations de ce système, i.e. en décalant la première équation vers l'avant et en substituant la valeur de $q$ donnée par la seconde, on obtient une équation aux différences d'ordre 2 en $p$ (que nous écrivons en introduisant des indices temporels plus explicites) :

$$p_t = \frac{p_{t-1}}{p_{t-2}} \frac{a_{11}p_{t-1} + a_{12}}{a_{21}p_{t-1} + a_{22}} \tag{17}$$

De même, en substituant dans la première équation des valeurs de $p$ et $p^-$ données par la seconde, on obtient une équation d'ordre deux en $q$ :

$$q_t = \frac{q_{t-1}}{q_{t-2}} \frac{a_{11}q_{t-1} + a_{21}}{a_{12}q_{t-1} + a_{22}} \tag{18}$$

Les solutions stationnaires de chacune de ces équations sont évidemment identiques à celles déjà trouvées, respectivement en (15) et (16). (17) et (18), de même que (15) et (16), ne diffèrent que par l'interversion des termes $a_{12}$ et $a_{21}$.

Comme le montre la seconde équation du système (14), la dynamique des quantités est identique à celle des prix, avec décalage d'une période. Nous choisissons d'étudier la récurrence non linéaire d'ordre deux (18), avec $q_0$ et $q_1$ positifs donnés. Son point fixe est l'unique solution positive de (16).

## 7.2 Fluctuations locales

### 7.2.1 (In)stabilité locale

Par dynamique locale, nous entendons l'étude de la dynamique au voisinage du point fixe, c'est-à-dire des proportions de von Neumann. Dans ce cas, la technique de la linéarisation permet de réduire les équations à des équations dynamiques linéaires, dont le comportement est bien connu. Sauf cas exceptionnel, il est ainsi possible de conclure à la stabilité locale ou non du point fixe, et plus précisément de donner la forme de la dynamique au voisinage de ce point.

Nous supposons donc que les deux valeurs initiales $q_0$ et $q_1$, ou plus généralement deux valeurs consécutives $q_t$ et $q_{t+1}$ atteintes au cours de la dynamique, sont toutes deux voisines du point fixe. En notant $dq_t$ l'écart au point fixe, la linéarisation de (18) conduit à une équation de récurrence linéaire d'ordre 2 qui, tous calculs faits, s'écrit

$$dq_t = (1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})dq_{t-1} - dq_{t-2} \tag{19}$$

où $\alpha_1$ est la valeur propre dominante de $\mathbf{A}$, et $\alpha_2$ l'autre valeur propre. L'intervention de $\alpha_1$ est attendue compte tenu de sa relation déjà établie $\alpha_1 = a_{12}\overline{q} + a_{22}$ avec le point fixe ; celle de $\alpha_2$ tient au fait que le calcul fait apparaître le rôle de la trace et du déterminant de $\mathbf{A}$, que l'on peut respectivement remplacer par $\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$. L'étude de (19) conduit à considérer les racines de l'équation

$$X^2 - (1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})X + 1 = 0 \tag{20}$$

En temps discret, la question est de comparer le module de ces racines à 1. Or $\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| < 1$, donc $0 < 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 2$ et le discriminant est négatif. Les racines sont donc complexes et, d'après leur produit, de module un. Il s'agit d'un cas limite, qui est le seul où la linérisation à laquelle nous avons procédé ne permet pas de conclure sur la stabilité ou l'instabilité locale. Tout juste peut-on affirmer qu'au voisinage de l'origine les quantités relatives, dans l'hypothèse où elles ne seraient pas cycliques au sens strict, convergent ou explosent "lentement".

Supposons toujours la proportion proche du point fixe pendant deux périodes consécutives. Le point $(q_{t-1}, q_t)$ reste alors, au moins quelque temps, proche de $(\overline{q}, \overline{q})$. Bien que la linéarisation ne permette pas ici de conclure sur le point essentiel de la stabilité locale, la même technique peut être utilisée pour définir les trois caractéristiques majeures des fluctuations locales : leur forme approximative, leur amplitude et leur périodicité.

### 7.2.2 Forme des fluctuations locales

Le calcul suivant précise les caractéristiques approchées de cette trajectoire. En notant $X_t = dq_t$ l'écart au point fixe en $t$, nous proposons de représenter $(q_{t-1}, q_t)$ dans le plan $R^2$ et de mesurer l'écart au point fixe sur deux dates par le nombre

$$d_t = (X_t)^2 - (1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})X_t X_{t-1} + (X_{t-1})^2 \tag{21}$$

Ce nombre est nul si et seulement si $X_{t-1} = X_t = 0$, c'est-à-dire si $(q_{t-1}, q_t)$ coïncide avec $(\overline{q}, \overline{q})$, auquel cas la dynamique d'ordre deux implique que toutes les quantités relatives futures (et les quantités passées, d'ailleurs) sont égales à $\overline{q}$. Sinon, ce nombre est positif, ce qui justifie que nous le considérions comme une mesure de l'écart au point fixe, considéré sur deux périodes consécutives.

La relation linéarisée (19) permet de remplacer $X_t$ dans l'expression (21) en fonction de $X_{t-1}$ et $X_{t-2}$. Tous calculs faits, on trouve $d_t = (X_{t-1})^2 - (1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})X_{t-1}X_{t-2} + (X_{t-2})^2$, c'est à-dire que $d_t = d_{t-1}$. En d'autres termes, aux approximations dues à la linéarisation près, la distance à l'origine est conservée d'une date à la suivante, et donc sur l'ensemble de la trajectoire. La trajectoire est donc définie approximativement par l'équation

$$d_t = d_0 \tag{22}$$

où la constante $d_0$ est définie par le point de départ $(q_0, q_1)$ et est supposée petite. Cette courbe est une ellipse dont le centre est le point fixe (ici noté (0,0), puisque l'équation (22) est formulée en terme d'écart au point fixe) et dont le grand axe est la première bissectrice. Quand la distance initiale augmente, l'ellipse correspondante se dilate homothétiquement.

L'ellipse est une courbe fermée. Ce calcul n'implique pas qu'il en soit ainsi pour la véritable trajectoire, qui peut rester pendant un certain temps proche de l'ellipse, mais toutefois converger ou exploser à long terme[3].

[3] On peut affirmer que, pour toute durée $T$ fixée et arbitrairement grande, on peut trouver un voisinage du point fixe tel que la trajectoire des couples $(q(t-1), q(t))$ ne s'écarte pas de l'ellipse de plus de $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné.

### 7.2.3 Amplitude des fluctuations

Comme, en première approximation, le point $(X_{t-1}, X_t)$ se déplace sur une ellipse, les fluctuations des écarts $X_t$ des proportions sont bornées. $X_t$ étant la projection de $(X_{t-1}, X_t)$ sur l'axe des ordonnées, le domaine des variations de $X_t$, c'est-à-dire l'amplitude des fluctuations, est obtenu en projetant l'ellipse sur cet axe. Les valeurs extrêmes de $X_t$ sont données par les points où les tangentes à l'ellipse sont horizontales. Ces points sont ceux où la dérivée partielle de l'expression $(X_t)^2 - (1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1})X_t X_{t-1} + (X_{t-1})^2$ par rapport à $X_{t-1}$ est nulle, c'est-à-dire qu'ils sont les points de la courbe (22) satisfaisant l'égalité

$$2X_t - (1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1})X_{t-1} = 0$$

On en déduit aisément la valeur estimée de l'amplitude :

$$A = 2\sqrt{\frac{d_0}{1 - 4/(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1})^2}} \tag{23}$$

Cette estimation suppose que les points $(X_{t-1}, X_t)$ prennent toutes les positions possibles sur l'ellipse, ou plus précisément que les positions occupées sont "denses" sur l'ellipse. D'autre part, en raison de l'approximation linéaire, les points $(X_{t-1}, X_t)$ ne sont pas exactement sur l'ellipse, et il peut arriver que certains points soient à l'extérieur, en particulier que $X_t$ dépasse les bornes extrêmes $\pm\, A/2$ calculées ci-dessus.

### 7.2.4 Périodicité

Les proportions varient en première approximation sur une ellipse que nous avons identifée. La question ici abordée est la description de leur mouvement sur cette ellipse.

Ce mouvement de $(X_{t-1}, X_t)$ sur l'ellipse est gouverné par l'équation (19). En posant

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \end{bmatrix}$$

on a $\begin{pmatrix} X_{t+n} \\ X_{t+1+n} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t+1} \end{pmatrix}$. Le calcul des valeurs propres de $M$ montre qu'il s'agit des solutions de (20), qui sont complexes de module un et s'écrivent donc $\lambda_1 = e^{i\theta}$ et $\lambda_2 = e^{-i\theta}$, où (considérer la somme des racines)

$$2\cos\theta = 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \qquad \left(\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) \tag{24}$$

La diagonalisation de $M$ conduit à l'écriture $M = PDP^{-1}$, où $P$ est la matrice des vecteurs propres et $D$ la matrice diagonale ayant les valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sur la diagonale. Effectuons le changement de variable $\begin{pmatrix} Y_t \\ Z_t \end{pmatrix} =$

$P^{-1}\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ X_t \end{pmatrix}$. Les variables transformées obéissent aux lois dynamiques simples $Y_t = \lambda_1 Y_{t-1}$ et $Z_t = \lambda_2 Z_{t-1}$, donc $Y_t = e^{i\theta t} Y_0$ et $Z_t = e^{-i\theta t} Z_0$ sont des fonctions périodiques de période

$$T = \frac{2\pi}{\theta} = \frac{2\pi}{Arc\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2\alpha_1}} \tag{25}$$

Les variables initiales $X_{t-1}$ et $X_t$ étant des combinaisons linéaires des variables transformées, les proportions sont également périodiques de période $T$. En général, cette période est non entière.

On voit que la période : (i) ne dépend pas des conditions initiales mais seulement de la matrice $\mathbf{A}$, et (ii) est fonction croissante du rapport $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ des valeurs propres (la périodicité $T$ est proche de 4 si les inputs de chaque industrie proviennent essentiellement de l'autre, $T = 6$ en cas de composition technique uniforme, $T$ grand si chaque industrie est presque autonome). Ce phénomène se comprend d'un point de vue économique : lorsque les inputs de chaque industrie sont essentiellement fournis par l'autre, les chocs se répercutent rapidement. Si au contraire les industries sont presque autonomes, la transmission des influences est lente et les cycles économiques sont longs.

## 7.3 Fluctuations globales

L'étude des fluctuations globales, c'est-à-dire hors du voisinage du point fixe, est complexe car la dynamique n'est pas linéaire. Toutefois, on peut procéder à des simulations et expérimentations graphiques et établir quelques résultats analytiques significatifs.

Commençons par quelques simulations. La première, qui représente mille couples $(q_t, q_{t+1})$ successifs, fait apparaître un fait majeur : la trajectoire de ces couples, si elle ne décrit pas exactement une ellipse, appartient néanmoins à une boucle fermée (figure 5).

Pour l'interprétation économique, il importe de bien comprendre que cette propriété est évidemment conservée pour les couples $(p_t, q_t)$ régis par le système (14). La simulation suivante (figure 6) reprend exactement les mêmes mille données pour ces couples prix-quantités.

La courbe est évidemment un peu différente mais conserve son allure générale (hormis une symétrie par rapport à la première bissectrice, cf. plus bas le paragraphe sur la symétrie temporelle). On voit ainsi que la fluctuation des quantités relatives est associée, avec un décalage de phase, à celle du prix relatif et, en esquissant un diagramme de phases à partir du système (14), que la boucle ici décrite est parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Les deux simulations suivantes apportent une contribution esthétique incontestable à l'étude du modèle de reproduction. La première (figure 7) simule 60 points, qui sont ceux situés sur la courbe extérieure. Une première observation est que la densité de ces points sur la courbe n'est pas uniforme. Toutefois, si nous relions deux points consécutifs par un segment, nous voyons apparaître

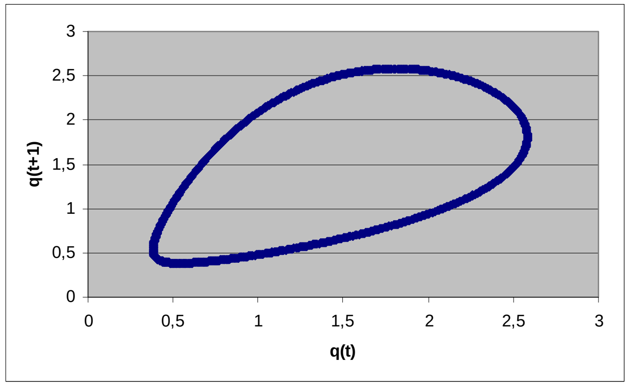


Figure 5: figure 5

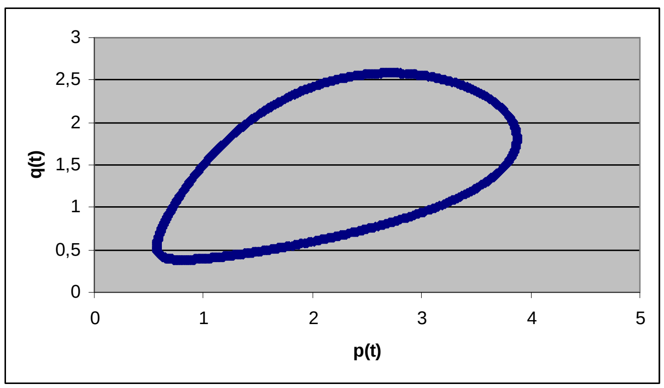


Figure 6: figure 6

comme enveloppe de ces segments l'ovale interne de la même figure. La régularité de cette enveloppe montre que le déplacement des points successifs sur la courbe obéit lui-même à une loi régulière et suggère la périodicité du mouvement.

La seconde (figure 8) simule simplement la série temporelle des proportions de la production et illustre les étranges régularités que recèle le déséquilibre permanent du marché.

#### 7.3.1 Composition technique uniforme

Un cas particulier important est celui où les deux industries ont la même composition technique, c'est-à-dire $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = k$. L'équation dynamique (18) se simplifie alors en $q_t = k\frac{q_{t-1}}{q_{t-2}}$, avec pour point fixe $q = k$. On peut vérifier "à la main" que la dynamique est périodique de période six. D'où vient ce phénomène?

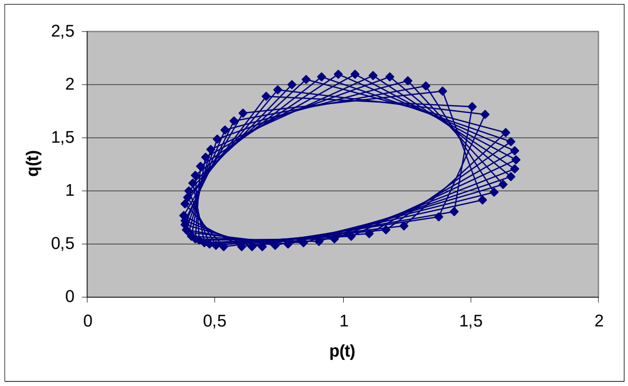


Figure 7: figure 7

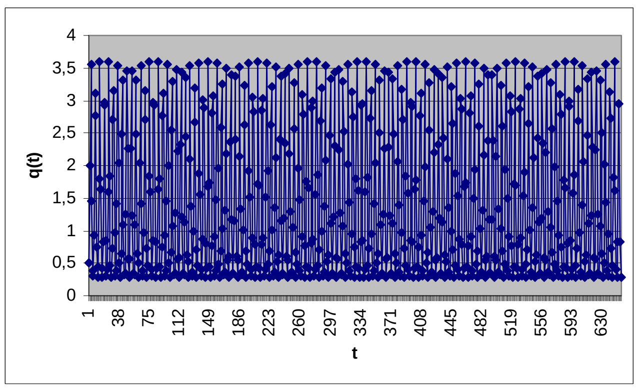


Figure 8: figure 8

En posant $x_t = \ln q_t$, la suite $x_t$ obéit à la relation de récurrence linéaire $x_t = \chi + x_{t-1} - x_{t-2}$, que l'on sait résoudre : on a $x_t = \chi + \zeta_1(\lambda_1)^t + \zeta_2(\lambda_2)^t$, où les constantes $\zeta_1$ et $\zeta_2$ sont ajustées aux valeurs initiales, et $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les racines de l'équation $X^2 - X + 1$. Or ces racines sont $\lambda_i = e^{\pm i \frac{2\pi}{6}}$, d'où les propriétés $(\lambda_i)^6 = 1$ et $x_{t+6} = x_t$, donc $q_{t+6} = q_t$

### 7.3.2 Une stratégie de résolution

Le principe de la formule (22) peut être généralisé à des calculs d'ordre supérieur. Il s'agit alors de trouver un polynôme $P_n(X_{t-1}, X_t)$ de degré $n$ qui est invariant à l'ordre $n$, c'est-à-dire qu'à cet ordre on a $P_n(X_{t-1}, X_t) = P_n(X_t, X_{t+1})$. Il est possible de faire les calculs en augmentant pas à pas la valeur de $n$, en partant du polynôme trouvé à la section précédente $P_2(X_{t-1}, X_t) = (X_{t-1})^2 -$

$(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1})X_{t-1}X_t + (X_t)^2$. Par exemple, l'étape suivante (passage à $n = 3$) consiste à chercher un polynôme $P_2(X_{t-1}, X_t) = a_{03}(X_{t-1})^3 + a_{12}(X_{t-1})^2 X_t + a_{21}X_{t-1}(X_t)^2 + a_{30}(X_t)^3 + P_2(X_{t-1}, X_t)$ où les coefficients $a_{ij}$ sont tels que, lorsque l'on remplace $X_t$ par sa valeur en fonction de $X_{t-2}$ et $X_{t-1}$ (on peut remplacer cette valeur par son approximation à l'ordre trois au voisinage du point fixe), le résultat obtenu (à l'ordre trois) soit égal à $P_3(X_{t-2}, X_{t-1})$. Alors il apparaîtra que le polynôme $P_3$ est un invariant à l'ordre trois, donc que la courbe décrite par le point $(X_{t-1}, X_t)$ est plus précisément (quoique toujours approximativement), d'équation $P_3(X_{t-1}, X_t) = Cte$, plutôt que l'ellipse décrite à la section précédente.

Ce calcul reste local en ce qu'il est fondé sur une approximation au voisinage du point fixe et des développements limités successifs. Soyons optimiste et supposons cependant qu'il soit possible de le poursuivre pour toute valeur de $n$ : on obtient un développement infini. Soyons très optimiste et supposons que la série entière $P_\infty(X_{t-1}, X_t)$ correspondant à ce développement infini converge, au moins dans un certain domaine. Alors nous sommes passés d'un calcul local à un calcul global, et la courbe sur laquelle le point $(X_{t-1}, X_t)$ se déplace a pour équation $P_\infty(X_{t-1}, X_t) = d_0$, où $d_0 = P_\infty(X_0, X_1)$. Il ne reste plus alors, pour généraliser les conclusions de l'étude locale, qu'à montrer qu'il s'agit d'une courbe fermée et que le déplacement sur cette courbe est périodique...

La première étape de la réalisation de cette stratégie consiste à passer d'un polynôme invariant de degré $n - 1$ à celui de degré supérieur. Les inconnues sont les coefficients de degré strictement égal à $n$, c'est-à-dire les $n + 1$ coefficients $a_{n,0}, ..., a_{i,n-i}, ..., a_{0,n}$. Dans l'identification des grandeurs $P_n(X_{t-1}, X_t)$ et $P_n(X_{t-2}, X_{t-1})$, on omet les termes d'ordre supérieur à $n$ (car ils excèdent la précision du calcul) et les termes inférieurs (car ils correspondent aux parties $P_{n-1}(X_{t-1}, X_t)$ et $P_{n-1}(X_{t-2}, X_{t-1})$ qui, par construction à l'ordre $n - 1$, sont identiques. Il suffit donc d'identifier les $n+1$ termes des polynômes $P_n(X_{t-1}, X_t)$ et $P_n(X_{t-2}, X_{t-1})$ qui sont d'ordre $n$ exactement. On obtient un système linéaire de $n+1$ équations dont les $n+1$ inconnues sont les coefficients $a_{i,n-i}$ $(i = 0, ..., n)$. Un problème vient de ce que ce système n'est pas toujours de type Cramer, c'est-à-dire que, pour certaines valeurs de $n$, il n'admet pas de solution unique. Il peut alors n'admettre aucune solution, ou alors en admettre une infinité :

- S'il n'admet aucune solution, peut-on en conclure qu'il n'existe aucun invariant d'ordre $n$ ? En fait, l'ensemble des invariants d'ordre donné est un espace vectoriel et, pour $n = 2$ par exemple, à côté de l'invariant $P_2$ identifié dans la section précédente, il existe les invariants $\lambda P_2$ où $\lambda$ est tout scalaire donné... y compris $\lambda = 0$ (le polynôme nul est évidemment invariant). L'absence de solution du système affine d'équations à un certain ordre ne signifie pas qu'il n'existe pas d'invarant d'ordre $n$, mais seulement que tous les calculs précédents peuvent être effacés et qu'il faut recommencer sous l'hypothèse que l'invariant d'ordre $n - 1$ est nul. Si ce cas se produisait pour une infinité de valeurs de $n$, il signifierait l'échec de la stratégie définie ci-dessus, puisqu'il n'existerait pas de série entière $P_\infty$ invariante.

- L'autre possibilité est que le système admette plusieurs invariants à un certain ordre, et donc, par combinaison linéaire, une infinité d'invariants. Cette éventualité est même une nécessité à certaines étapes : ainsi, lors de la recherche d'un invariant d'ordre 4, nous trouverons à côté de l'invariant attendu le carré de l'invariant d'ordre deux déjà identifié. De façon plus générale, les produits d'invariant sont des invariants. Certains degrés de liberté qui apparaissent à certaines étapes pourront donc être éliminés en tenant compte de cette propriété.

Une première question non résolue est de savoir si la suite des calculs, avec les aménagements décrits ci-dessus, permet de définir un invariant $P_\infty$.

### 7.3.3 Symétrie temporelle

Une propriété importante de la dynamique exprimée par (18) ou (17) est la symétrie temporelle que sa structure comporte. Elle tient à ce que cette équation est de la forme $q_t q_{t-2} = f(q_{t-1})$ ou, si l'on préfère, $q_{t-1}q_{t+1} = f(q_t)$, c'est-à-dire que $q_{t-1}$ et $q_{t+1}$ jouent des rôles symétriques, à $q_t$ donné. Construisons alors une suite partant de $(q_0, q_1)$ et arrêtons-nous à l'étape $n$. Considérons la suite définie par la même formule de récurrence mais dont le point de départ est $(q_n, q_{n-1})$. La propriété de symétrie temporelle exprime que les termes suivants de cette suite sont $q_{n-2}, q_{n-3}, ..., q_1, q_0$, suite qui peut être prolongée pour des valeurs négatives, c'est-à-dire que l'on peut reconstituer de façon unique le passé, en utilisant la *même* formule que pour le futur : le temps est non seulement réversible, mais selon une formule identique vers l'avenir et vers le passé.

En particulier, considérons un invariant $I(q_{n-1}, q_n)$, c'est-à-dire une expression telle que $I(q_{n-1}, q_n) = I(q_0, q_1)$. Les points $(q_{n-1}, q_n)$ se déplacent dans le plan sur la courbe $I(q_{n-1}, q_n) = I(q_0, q_1)$. Mais ces mêmes points représentent le passé pour une dynamique dont le point de départ est $(q_1, q_0)$. La même courbe a pour équation $I(x, y) = Cte$ et $I(y, x) = Cte$. D'où $I(y, x) = I(x, y)$, c'est-à-dire que l'invariant est symétrique. On tire de cette propriété deux conséquences :

- la première est est que les courbes de niveau $I(q_{n-1}, q_n) = I_0$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Cette propriété générale étend celle que nous avons vue dans l'étude locale concernant la position de l'ellipse, mais il ne s'agit plus ici d'une simple approximation.

- la seconde est que, dans la recherche d'un invariant global d'ordre $n$ décrite au point précédent, on pourra poser sans restriction effective supplémentaire la condition $a_{ij} = a_{ji}$. Cette condition permettra d'éliminer des invariants non symétriques ainsi qu'un nombre identique d'équations d'invariance.

### 7.3.4 La formule philosophale

Imaginons que nous ayons trouvé la formule $J$ qui donne, par exemple, la valeur moyenne de $q_t$, que nous notons $E(q)$, en fonction du point de départ $(q_0, q_1)$ : $E(q) = J(q_0, q_1)$. Pour le point de départ $(q_{n-1}, q_n)$, la formule qui donne la valeur moyenne est $J(q_{n-1}, q_n)$, mais cette valeur moyenne reste la même puisque le poids des $n$ premières valeurs dans la détermination de la valeur moyenne en temps infini est nul. Donc $J(q_0, q_1) = J(q_{n-1}, q_n)$, c'est-à-dire que

$J$ est un invariant. En conséquence, nous avons alors trouvé l'invariant cherché : l'équation de la courbe $(C)$ qui supporte tous les points $(q_{n-1}, q_n)$ est $J =$ Cte. Nous avons ainsi la propriété que la formule de la valeur moyenne donne la formule de la courbe !

De même la valeur maximale, l'amplitude, la valeur moyenne du cube de $q_t$, etc., sont des grandeurs qui dépendent du point de départ, mais qui restent les mêmes quand on remplace $(q_0, q_1)$ par $(q_{n-1}, q_n)$. En conséquence, ce sont aussi des invariants. Donc toutes ces valeurs, qui s'écrivent $V = V(q_0, q_1)$, ne dépendent de $(q_0, q_1)$ que par l'intermédiaire de $J$ : il existe une fonction $U : R \to R$ telle que $V(q_0, q_1) = U[J(q_0, q_1)]$. La connaissance de la formule $J$ est donc la clef de toute l'analyse de toutes les caractéristiques des fluctuations.

En résumé, l'existence de cycles dans cette dynamique non linéaire semble assurée sur la base nombreuses simulations, couvrant une large variété de techniques et de conditions initiales. La linéarisation ne permet pas de conclure sur la nature exacte de la dynamique locale. Au niveau global, les simulations montrent que prix et quantités relatives parcourent une boucle fermée autour de leur position d'équilibre complet, et que ces courbes emboîtées relèvent de la déformation progressive d'une ellipse lorsque la position initiale s'écarte du point fixe. Une stratégie de démonstration a été esquissée, mais nous ne disposons pas (encore ?) de la formule philosophale ou d'une technique alternative qui permettrait de démontrer rigoureusement les faits ainsi suggérés.

# 8 Conclusion

La formalisation de la reproduction que nous avons proposée intègre un mécanisme de marché permettant la détermination simultanée des prix comme rapport des quantités apportées au marché et de l'allocation des inputs. On peut alors traiter dans un même modèle les situations d'équilibre et de déséquilibre, au sens de l'incompatibilité des plans des agents. La variable motrice est la décision d'accumulation des capitalistes, prise à partir de leur anticipation des prix et évaluée objectivement par les prix et les taux de profit réalisés. Sur la base des quantités disponibles et de l'anticipation du prix, le modèle détermine le prix de marché, les taux de profit, les allocations des inputs et les productions effectives. En dehors de l'équilibre, à chaque période une marchandise est rare (en excès de demande) et l'autre est surabondante (en excès d'offre). La marchandise rare est entièrement accumulée, son producteur réalise son plan de production et son taux de profit anticipé est égal au taux de croissance qu'il va réaliser dans la période. La marchandise surabondante est partiellement inutilisée et son producteur révise à la baisse son plan de production. L'allocation des inputs ne correspondant pas à celle qui avait été prévue, les deux producteurs sont confrontés à une situation de déséquilibre. Ce déséquilibre est la conséquence du mécanisme de marché retenu, qui diffère fondamentalement de la représentation du marché qui s'est imposée depuis Walras. Dans notre modèle, les décisions de dépense effective sont prises sur la base des prix anticipés et non de la connaissance du vecteur entier des prix de marché. Cette hypothèse raisonnable, même si la formalisation ici retenue est trop simple, permet de surmonter la difficulté que connaît la théorie walrassienne dans le traitement des situations de déséquilibre. En dehors de l'équilibre, les prix walrassiens sont indéterminés et une économie avec complémentarités techniques est amenée à disparaître si elle est régie par le tâtonnement (voir l'annexe), alors qu'elle se reproduit à travers une dynamique du déséquilibre selon le mécanisme que nous avons proposé.

Dans notre modèle l'équilibre de la période, défini par l'égalité du prix anticipé et du prix de marché, admet la disparité des taux de profit dont l'égalité est une condition supplémentaire de l'équilibre complet. Il ne se réalise que par hasard et ne joue aucun rôle dans la dynamique qui n'est pas une suite d'équilibres temporaires hicksiens mais une dynamique du déséquilibre.

L'étude dynamique s'appuie sur une propriété du modèle qui s'exprime de deux manières alternatives, soit comme relation linéaire entre la proportion des productions et le prix anticipé, soit comme égalité entre les taux de profit anticipés et les taux de surplus. Nous avons montré qu'il s'agit d'une illustration particulière d'une propriété générale de la théorie classique jusqu'à présent ignorée : il existe une même relation homographique décroissante entre les taux de profit sectoriels et les taux de surplus des marchandises.

Nous avons distingué la dynamique de longue période et les fluctuations. Des simulations ont montré la stabilité du taux moyen de croissance de l'économie et sa dépendance des conditions initiales. Une propriété originale du modèle est donc la permanence des effets de chocs réels transitoires sur le taux de croissance de long terme, qui s'explique par l'exclusion de marchandises du processus d'accumulation dans une économie en déséquilibre. L'étude des fluctuations suggère de fortes régularités avec un comportement cyclique, même si ce point n'a pas été établi rigoureusement.

L'originalité de notre démarche est de se situer en rupture avec une tradition qui veut que la théorie économique ne puisse s'intéresser qu'aux situations d'équilibre. Nous avons voulu au contraire parler de la détermination des prix, quantités et taux de profit hors de l'équilibre, et montrer que leur dynamique dégage des régularités comparables à celles des modèles traditionnels.

# 9 Annexe : Une comparaison avec le tâtonnement walrassien

Une façon de comparer des théories est de juger des résultats qu'elles produisent dans une situation donnée. C'est dans cette perspective que nous proposons de nous livrer à l'exercice consistant à analyser le même modèle que précédemment mais en supposant maintenant que le mécanisme de formation des prix est un tâtonnement walrassien entre agents preneurs de prix, et non pas le mécanisme précédemment envisagé. Remarquons qu'iI ne s'agit pas d'une comparaison avec la théorie actuelle de l'équilibre général puisque le modèle est dépourvu de marchés à terme.

Dans ces conditions, la variable $p^a$ de la première partie s'interprète comme un prix crié par le commissaire priseur et "pris" par les producteurs comme base de leur calcul. Compte tenu de leur volonté d'accumulation maximale, les capitalistes maximisent leur production à venir sous la contrainte de leur fonction de production et en respectant leur contrainte de budget. En notant maintenant $q_i$ les dotations existantes (auparavant notées $q_i^-$), leur programme s'écrit :

$$\underset{o_i, d_j}{Max} \left( \min \left\{ \frac{q_i - o_i}{a_{ii}}, \frac{d_j}{a_{ij}} \right\} \right)$$
$$\text{sous } d_j = o_i p_{ij}$$

Le maximum est manifestement atteint quand l'égalité $\frac{q_i - o_i}{a_{ii}} = \frac{d_j}{a_{ij}}$ est satisfaite (en substituant la contrainte dans la fonction objectif, on voit que les deux arguments de la fonction min sont respectivement décroissant et croissant en $o_i$), ce qui permet de calculer les fonctions d'offre et de demande agrégées suivantes :

$$\begin{array}{ll} o_1 = \frac{q_1}{1+k_1 p} & d_2 = \frac{q_1 p}{1+k_1 p} \\ o_2 = \frac{q_2 k_2 p}{1+k_2 p} & d_1 = \frac{q_2 k_2}{1+k_2 p} \end{array} \tag{26}$$

expressions dans lesquelles $p = p_{12}$ par définition et où on a introduit la notation $k_1 \overset{déf}{=} \frac{a_{11}}{a_{12}}$ et $k_2 \overset{déf}{=} \frac{a_{21}}{a_{22}}$.

On remarque que l'offre et la demande d'un bien sont toutes deux des fonctions décroissantes de son prix relatif : les quantités produites dans chaque secteur étant données, une hausse du prix relatif d'un bien $i$ accroît le niveau d'activité désiré du secteur qui le détient, qui retient donc davantage de son propre bien et diminue son offre de $i$, tout en augmentant sa demande de $j$. Cette même hausse du prix de $i$ est une diminution du prix relatif de l'autre bien $j$, en sorte que l'autre secteur, producteur de $j$, révise quant à lui à la baisse son plan de production et diminue sa demande de $i$ (tout en augmentant son offre de $j$).

En négligeant le cas dégénéré de déterminant nul de la matrice des coefficients techniques, on suppose pour le moment que :

$$\min\{k_1, k_2\} < q < \max\{k_1, k_2\} \tag{27}$$

Cette condition sur les proportions existantes de la production assure qu'il existe un prix relatif strictement positif et fini qui égalise les offres et demandes. Ce prix d'équilibre, noté $p_T$, est unique et vaut :

$$p_T = \frac{1}{k_2} \frac{q - k_2}{k_1 - q}$$

Ce prix permet une complète utilisation productive des ressources existantes. Sur la figure 1, c'est lui qui supporte l'équilibre au point T.

Connaissant les fonctions d'offres et demandes (26), on calcule les demandes excédentaires $z_i(p) = d_i - o_i$ :

$$\begin{array}{l} z_1(p) = k_2 q_2 \frac{(k_1 - q)(p - p_T)}{(1+k_2 p)(1+k_1 p)} \\ z_2(p) = -p z_1(p) \end{array} \tag{28}$$

où la seconde équation n'est qu'une réécriture de la loi de Walras.

Le signe de $z_1(p)$ est celui de $(k_1 - q)(p - p_T)$. D'après la condition (27), $k_1 - q$ a le même signe que $k_1 - k_2$, donc que $\delta = \det(\mathbf{A})$. Il en résulte que le signe de l'excès de demande $z_1(p)$ est celui de $p - p_T$ si $\delta > 0$, le signe opposé sinon. En conséquence l'équilibre à $p_T$ est localement stable pour un tâtonnement walrassien si $\delta < 0$, et instable si $\delta > 0$. Ce résultat invite à distinguer deux cas selon le signe de $\delta$.

a) Le cas d'industries faiblement interdépendantes ($\delta > 0$)

L'interprétation économique de la condition $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, équivalente à $k_1 > k_2$, est que chaque industrie fait davantage appel comme input à son propre produit qu'à celui de l'autre industrie : les industries sont "introverties" (en changeant si nécessaire les unités de mesure, on peut se ramener au cas où $a_{11} > a_{21}$ et $a_{22} > a_{12}$).

Avec $k_2 < q < k_1$, l'équilibre à $p_T$ est instable comme on vient de le voir, puisque le signe de l'excès de demande en bien 1 est celui de $p - p_T$ : l'excès de demande est positif (respectivement, négatif) si le prix relatif du bien 1 excède (respectivement, est inférieur à) $p_T$. Toutefois, on note que les formules (28) des excès de demande recèlent aussi deux autres équilibres "cachés" avec un bien libre. Le premier correspond à $p = 0$, c'est-à-dire $p_1 = 0,\ p_2 > 0$. On a alors $z_1(p) < 0$ et $z_2(p) = 0$, en sorte qu'il s'agit bien d'un équilibre où le bien 1 est libre (les fonctions (26) permettent en outre de voir qu'en ce cas $d_2 = o_2 = 0$). L'autre correspond à $p = +\infty$, c'est-à-dire $p_1 > 0,\ p_2 = 0$ (alors $z_1(p) = \frac{k_2(k_1-q)}{p(k_1+k_2)} = 0$ et $z_2(p) = -\frac{k_2(k_1-q)}{k_1+k_2} < 0$, avec $d_1 = o_1 = 0$). Pour $p_1 = \varepsilon > 0,\ p_2 = 1$ on a $z_1(p) < 0$, ce qui montre que le premier équilibre est stable. De même pour le second.

Ce cas est celui qui a été représenté sur la figure 1. L'équilibre en T est instable (on le vérifie facilement sur la figure), mais il existe deux autres équilibres, en E et F, associés respectivement à un prix nul du bien 2 ou au contraire du bien 1. Il est facile de vérifier graphiquement que si le prix du bien 2 (1) est nul, il existe en E (F) un excès d'offre du bien 2 (1), tandis que l'offre et la demande du bien 1 (2) sont également nulles. En conséquence le tâtonnement converge, sur le marché de la période, soit vers un équilibre où le bien 1 est libre, soit vers un équilibre où c'est au contraire le bien 2 qui est libre, selon que le premier prix crié au hasard aura été inférieur ou supérieur à $p_T$.

A la période suivante, le secteur producteur du bien à prix nul est dépourvu d'inputs utilisables et ne peut rien produire. Et à la période d'après, c'est l'autre secteur qui ne peut rien produire. L'économie disparaît complètement en deux périodes.

b) Le cas d'industries fortement interdépendantes ($\delta < 0$)

Avec $k_1 < q < k_2$ il n'y a pas d'équilibre à prix nul (il suffit de raisonner comme précédemment pour voir que l'excès de demande d'une marchandise à prix nul est positif). L'équilibre en T est unique et globalement stable. Le tâtonnement dans la période amène à une pleine utilisation des ressources disponibles.

Etudions alors la dynamique des quantités dans la séquence des équilibres successifs. En notant $\mathbf{A}$ la matrice des coefficients techniques et $\mathbf{q}$ le vecteur ligne des quantités produites, les niveaux d'activité de la période suivante sont solution du système d'équations $\mathbf{q}^+\mathbf{A} = \mathbf{q}$, soit $\mathbf{q}^+ = \mathbf{q}\mathbf{A}^{-1}$. En itérant la formule, on obtient les niveaux d'activité de la période $t$, soit $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0)\mathbf{A}^{-t}$.

La matrice $\mathbf{A}$ est inversible, avec une valeur propre positive et une négative (car $\delta < 0$). Le théorème de Perron-Frobenius appliqué à la matrice positive $\mathbf{A}$ assure que la racine positive $\alpha^*$ est plus grande en valeur absolue que la racine négative $\alpha_2$, qu'il existe un et un seul (à un facteur près) vecteur propre positif $\mathbf{q}^*$ associé à $\alpha^*$, que le vecteur propre $\mathbf{q}_2$ associé à $\alpha_2$ a une composante négative et une positive ; enfin, parce que la matrice $\mathbf{A}$ est productive, on a $\alpha^* < 1$. La matrice $\mathbf{A}^{-1}$ admet les mêmes vecteurs propres $\mathbf{q}^*$ et $\mathbf{q}_2$, associés aux valeurs propres inverses $\beta_1 = 1/\alpha^*$ et $\beta_2 = 1/\alpha_2$, qui sont telles que $\beta_2 < -1$,et $|\beta_2| > \beta_1 > 1$.

Pour étudier la dynamique, on décompose le vecteur $\mathbf{q}(0)$ dans la base formée des vecteurs propres. Il existe des scalaires $\gamma_1$ et $\gamma_2$ tels que $\mathbf{q}(0) = \gamma_1\mathbf{q}^* + \gamma_2\mathbf{q}_2$, d'où il vient $\mathbf{q}(t) = \mathbf{A}^{-t}\mathbf{q}(0) = \gamma_1\mathbf{A}^{-t}\mathbf{q}^* + \gamma_2\mathbf{A}^{-t}\mathbf{q}_2 = \gamma_1\beta_1^t\mathbf{q}^* + \gamma_2\beta_2^t\mathbf{q}_2$.

Considérons d'abord le cas exceptionnel où les proportions initiales sont celles du vecteur $\mathbf{q}^*$. Alors $\gamma_2 = 0$ et $\mathbf{q}(t) = \gamma_1\beta_1^t\mathbf{q}^*$: les quantités produites suivent un sentier de croissance équilibrée au taux $\beta_1 - 1 > 0$, en conservant les mêmes proportions. Si au contraire $\mathbf{q}(0)$ n'est pas proportionnel à $\mathbf{q}^*$, la formule $\mathbf{q}(t) = \gamma_1\beta_1^t\mathbf{q}^* + \gamma_2\beta_2^t\mathbf{q}_2$ avec $|\beta_2| > \beta_1 > 1$ montre que le terme $\gamma_2\beta_2^t\mathbf{q}_2$ l'emporte, c'est-à-dire que la direction du vecteur $\mathbf{q}(t)$ se rapproche asymptotiquement de celle de $\mathbf{q}_2$. Comme $\mathbf{q}_2$ a une composante négative, c'est aussi le cas de $\mathbf{q}(t)$ pour $t$ assez grand. En d'autres termes, il existe une date finie $\tau$ à laquelle l'un des niveaux d'activité, tel que déterminé formellement par la solution algébrique, devrait devenir négatif. C'est dire que la complète utilisation des ressources à cette date est impossible. La date $\tau$ est celle où la condition (27) n'est plus vérifiée. En $\tau$, le tâtonnement converge vers le seul équilibre, qui implique un prix nul du bien 1 (si $q_\tau > k_2$) ou du bien 2 (si $q_\tau < k_1$). La production du bien qui est libre en $\tau$ s'annule en $\tau + 1$, et l'économie disparaît complètement en $\tau + 2$.

En somme, le modèle envisagé confronte en général l'économie, à cause des complémentarités techniques, à la nécessité d'exclure des marchandises de l'accumulation. Un planificateur qui suivrait la règle de pleine utilisation des ressources et opterait, quel que soit le signe du déterminant, pour la même allocation T que le tâtonnement obtient seulement si $\delta < 0$, y serait lui aussi tôt ou tard confronté. Le tâtonnement walrassien ne permet de se débarrasser d'un bien que lorsque son prix s'annule. Il le fait soit immédiatement ($\delta > 0$), soit à terme ($\delta < 0$), et l'économie qu'il régit est amenée à disparaître. Par contraste, le mode de formation des prix que nous avons envisagé permet de se défaire en déséquilibre d'une fraction du bien qui se trouve "surabondant" à cette période, sans annuler pour autant son prix. Il autorise la survie de l'économie.

**Références bibliographiques**

K.J Arrow et F.H. Hahn, *General Competitive Analysis*, North-Holland, 1971.

C. Benetti, « Le problème de la variation des prix : les limites de la théorie walrassienne », *Revue économique*, sept. 2002, p. 917-931.

C. Benetti et J. Cartelier, "Money and Price Theory", *International Journal of Applied Economics and Econometrics*, april-june 2001.

C. Bidard et E. Klimovsky, *Capital, salaire et crises*, Dunod, 2006.

J. Hicks, *Valeur et capital*, 1939, trad. franç. Dunod, 1956.

J. von Neumann, "A model of general economic equilibrium", *Review of Economic Studies*, vol. 13, 1945.

A. Rebeyrol, *La pensée économique de Walras*, Dunod, 1999.

L. Walras, *Eléments d'économie politique pure*, 1874, in Auguste et Léon Walras, *Oeuvres économiques complètes*, tome VIII, Economica, 1988.