Répudiation opportuniste de la dette, risque juridique et risque comptable

(version préliminaire)

Bertrand Chopard et Eric Langlais
BETA CNRS et Nancy-Université

November 20, 2006

Abstract

1 Introduction

Dans de nombreux travaux (Alary, Gollier (2004), Bolton, Scharfstein (1996), Longhofer, Peters (2000), Povel (1999), Recasens (2001)), le rôle de la procédure collective consiste, dans un contexte d'asymétrie d'information entre les principaux acteurs de la défaillance, à évaluer l'entreprise en vue de déterminer son sort et répartir entre les ayants droit cette valeur en respectant l'ordre de remboursement établi. Ce traitement judiciaire de la défaillance compose avec les conflits d'intérêts qui surviennent entre les différents créanciers et la dissimulation des difficultés financières des entreprises soucieuses de conserver la confiance de leurs partenaires alors que les dirigeants s'inquiètent de préserver leurs bénéfices privés, leur emploi ou leur réputation. En résumé, la procédure judiciaire doit déterminer l'issue préférable de la défaillance (redressement ou liquidation) et imposer un traitement collectif. Plus précisément, elle doit empêcher les créanciers d'exercer individuellement leur voies d'exécution dans la mesure où ce comportement réduit leur bien-être collectif, notamment lors d'une liquidation. Dans le cadre de cette activité, un système de traitement des défaillances d'entreprises peut commettre des erreurs de type 2 lorsqu'il ordonne la liquidation d'entreprises dont la continuation aurait été préférable et des erreurs de type 1 lorsqu'il permet la continuation d'entreprises dont la valeur de liquidation est supérieure à leur valeur de continuation. Dans cet article, nous étudions, dans un cadre d'asymétrie d'information entre les firmes et les banques sur la capacité de remboursement des emprunteurs, les conditions sous lesquelles le défaut de paiement stratégique peut apparaître. Il s'agit, pour une firme capable de respecter ses engagements financiers, de profiter de l'asymétrie d'information pour renégocier le niveau de remboursement de sa dette. Nous analysons ensuite l'impact du risque juridique, appréhendé par la fréquence des erreurs de type 1 et de type 2, sur l'occurence du défaut de paiment stratégique et les externalités générées par les firmes opportunistes. Enfin, nous procédons à une comparaison des niveaux de bien-être social dans ces différents états afin de comprendre dans quelle mesure l'introduction d'une possibilité de rénégocier le niveau de remboursement peut être profitable collectivement.

2 Le modèle

Nous considèrons une économie où les contrats de dette proposés par les banques prévoient un remboursement D qui est échelonné sur deux périodes. A la date 1, l'entreprise s'engage à rembourser $y_1 < D$. A la date 2, l'entreprise remboursera $y_2 \in [D - y_1, +\infty[$. Si l'entreprise ne respecte pas la première échéance, le créancier bancaire peut exercer sa garantie, c'est-à-dire, dans notre modèle, liquider le projet d'investissement. Précisément, la valeur de liquidation du projet d'investissement est positivement corrélée à la valeur du cash flow réalisé à la date 1. Nous nommons ainsi V la valeur de liquidation du projet d'investissement si $y_1 > 0, v$ la valeur de cette variable lorsque $y_1 = 0$ et supposons que $D > V > v$. Nous supposons en effet que le montant obtenu par la banque est d'autant plus élevé que les actifs associés au projet d'investissement génèrent de la valeur. Toutefois, le montant ainsi garanti est strictement inférieur à la valeur faciale de la dette. Enfin, au moment où le contrat de dette est signé par les deux parties, aucune ne connaît la qualité du projet d'investissement qui sera financé. En d'autres termes, toutes les firmes sont homogènes du point de vue des caractéristiques observables. Il existe deux types de projets d'investissement qui caractérisent le type de l'entreprise. Le premier type de projet (que l'on nomme le projet des firmes saines ou FS) sanctionne une activité (par exemple de recherche et développement) qui génère des flux financiers strictement positifs à chaque période. Précisément, il donne à la première échéance un revenu égal à $y_1 < D$ qui permet à l'emprunteur d'honorer le premier remboursement, alors qu'il donne à la seconde période un revenu (actualisé) égal à $y_2 \in [D - y_1, +\infty[$. La valeur (actualisée) des paiements procurés par ce projet permet donc à l'emprunteur de procéder au remboursement complet de sa dette dans la mesure où $y_1 + y_2 - D > 0$. Le second type de projet d'investissement correspond à une activité qui est couronnée de succès uniquement en seconde période. En d'autres termes, $y_1 = 0$ et $y_2 < D - y_1$. Ces flux ne permettent pas à cette entreprise dite insolvable (FNS) de rembourser D sur les deux périodes sauf à renégocier celle-ci. Le déroulement du jeu est le suivant :

- A la date 0, la banque et l'emprunteur signent un contrat de dette, pour une valeur totale D, sans qu'il soit possible aux deux parties de connaître le type de l'emprunteur ou du projet d'investissement,

- A la date 1, la Nature choisit initialement le type de l'emprunteur. L'emprunteur peut être de type FS, c'est-à-dire porter un projet d'investissement qui génère y_1 ou être du type FNS avec un projet qui ne génère aucun flux à la date 1. Nous notons θ la proportion de firmes de type FS dans la population totale.

- Dès que les emprunteurs ont observé un signal privé informatif sur leur type, ils ont la possibilité de renégocier le montant de la dette à rembourser. Un emprunteur de type FS choisit soit de respecter l'échéancier du remboursement de la dette (action R), soit de se déclarer en difficulté de paiement et demander une renégociation de sa dette (action NR). De son côté, un emprunteur de type FNS n'a pas d'autre possibilité que de se déclarer en difficulté et demander à renégocier sa dette (NR) puisque $y_1 = 0$. Dans la mesure où le type de l'emprunteur n'est pas vérifiable par le prêteur, ce dernier peut soit accepter la renégociation (action NL) de la dette pour une valeur $d < D$, soit choisir de liquider la firme (action L) pour une valeur qui dépend du type de l'emprunteur ($v < V < D$).

- A la date 2, les paiements sont versés aux deux parties.

Dans le cadre de la résolution du modèle, nous notons σ_L la stratégie mixte du prêteur, qui assigne une probabilité q à l'action L, et une probabilité $1 - q$ à l'action NL. σ_B est la stratégie mixte de l'emprunteur de type FS, qui assigne une probabilité p à l'action R, et une probabilité $1 - p$ à l'action NR. $(\mu, 1 - \mu)$ est la croyance formée par le prêteur respectivement d'atteindre le noeud de décision résultant de l'observation de l'action NR par une entreprise de type FS/une entreprise de type FNS. Littéralement, μ peut être interprétée comme la probabilité pour le prêteur que l'emprunteur qui déclare ne pas pouvoir rembourser soit de type FS. L'équilibre du jeu est alors caractérisé par la donnée d'un triplet précisant la stratégie du prêteur, la stratégie de l'emprunteur de type FS et les croyances du prêteur sur le type de l'emprunteur qui permettent de supporter les stratégies choisies par les joueurs (actifs) comme équilibre. En d'autres termes, l'équilibre du jeu est entendu au sens d'un equilibre bayésien parfait et correspond à un triplet $(\sigma_B, \sigma_L, \mu)$.

3 L'équilibre sans renégociation de la dette

Nous négligeons dans un premier temps le fait que les prêteurs ont la possibilité de renégocier la dette, et supposons que face à un emprunteur qui annonce une difficulté de paiement, une banque prononce (obtient) directement sa liquidation. Dans ce cas, l'équilibre du jeu est associé au choix par les emprunteurs de type FS de leur stratégie dominante, c'est-à-dire $\sigma_B = R$ si $y_2 > D - V$ ou $\sigma_B = NR$ si $y_2 < D - V$. En d'autres termes, l'entreprise de type FS choisit de ne pas respecter son engagement financier si et seulement si le gain lié à la liquidation est supérieur à son gain en cas de poursuite de l'activité sous réserve de respecter les échéances de remboursement de la valeur faciale de la dette.

Cette stratégie pure est d'autant plus probable que les gains liés à la poursuite du projet d'investissement ou la valeur de liquidation des actifs du projet d'investissement mis en garantie sont faibles et que l'endettement est important. Sous l'hypothèse $D > V$, il apparaît également que la stratégie pure dominante de l'entreprise de type FS est pareto optimale uniquement sous la condition $y_2 > D - V$. Enfin, dans la mesure où les firmes FNS sont à chaque fois liquidées, il apparaît une perte liée à la disparition de y_2 générée par la stratégie de liquidation des banques qui font face au défaut de paiement. Précisément, la valeur du bien-être collectif (noté BE_{SR}) est tel que

$$BE_{SR} = \begin{cases} \theta(y_1 + y_2) \text{ si } y_2 > D - V \\ \theta y_1 \text{ si } y_2 < D - V \end{cases}$$

Le bien-être collectif dépend donc de la valeur de y_2. Les questions que nous nous proposons d'étudier sont les suivantes. Si on introduit la possibilité pour les entreprises de renégocier leur contrat de dette, c'est-à-dire le montant de dette à rembourser à la date 1, sous quelles conditions, le défaut de paiement stratégique peut-il émerger à l'équilibre ? Dans quelle mesure l'introduction d'une renégociation du contrat de dette dans un contexte d'asymétrie d'information entre les banques et les entreprises peut elle améliorer le bien-être collectif ? Enfin, nous étudierons également les conditions sous lesquelles l'introduction d'un tribunal (et par ce biais d'un risque juridique matérialisé par l'occurence d'erreurs de type 1 et d'erreurs de type 2) peut avoir un impact sur l'émergence du défaut de paiement stratégique et sur le bien-être collectif ?

4 L'équilibre avec renégociation de la dette

Dans notre jeu, les emprunteurs de type FNS ont un comportement passif. Ils peuvent néanmoins être imités par les emprunteurs de type FS qui peuvent vouloir obtenir une renégociation de leur dette en profitant de l'asymétrie d'information entre les prêteurs et les emprunteurs. Malgré tout, l'existence de ce comportement stratégique suppose que les prêteurs eux-mêmes n'aient pas pour stratégie dominante la liquidation des entreprises qui traversent une crise de liquidité. Du point de vue d'un emprunteur de type FS, il existe une incitation à demander la renégociation de la dette (jouer NR est une stratégie strictement dominante) seulement si la condition $y_2 - D < -V$ est vérifiée, ou encore si le supplément de revenu du projet d'investissement n'excède pas l'écart entre le montant de la dette et la valeur de liquidation de la firme. Dans le cas contraire, le remboursement de la dette est une stratégie strictement dominante pour l'emprunteur FS et il n'y aura jamais une demande de renégociation de la dette. De leur côté, les prêteurs disposent d'une stratégie strictement dominante, indépendante de leurs croyances sur l'identité de l'emprunteur, uniquement sous la condition $v > d$. Sous cette condition, la banque préfère toujours jouer L. Au contraire si $d > v$, la meilleure décision des prêteurs dépend du type de l'emprunteur. Le prêteur préfèrera L s'il estime que l'emprunteur est du type FS et préfèrera NL s'il estime que l'emprunteur est de type FNS.

Au vu de ces remarques, nous en déduisons l'existence de deux premiers types d'équilibres excluant l'utilisation de stratégies mixtes.

Lemma 1 *Si $v > d$ et simultanément $y_2 > D - V$, alors l'unique équilibre est caractérisé par $(\sigma_B = R, \sigma_L = L)$, associé à la croyance $\mu = 0$. Si $y_2 < D - V$ alors l'unique équilibre est caractérisé par $(\sigma_B = NR, \sigma_L = L)$ associé à la croyance $\mu = 1$.*

Corollary 2 *Les emprunteurs de type FNS sont mis en liquidation par les prêteurs.*

Proof. voir annexe 1. ■

Nous pouvons utiliser la variable y_2 pour étudier l'occurence des différents équilibres bayésiens parfaits de ce jeu. Si $y_2 < D - V$, c'est-à-dire si le gain de l'entreprise de type FS en cas de continuation de son projet d'investissement est strictement inférieur à son gain dans le cadre d'une liquidation de même projet, la firme de type FS a obligatoirement une stratégie pure dominante qui consiste à ne pas respecter son engagement financier à la date 1 (ou choisir l'action NR)[1]. Le comportement de faillite stratégique conduit au pooling des emprunteurs en raison de la convergence des intérêts des emprunteurs de type FS et des prêteurs. Le cas rival nous intéresse davantage. Si $y_2 > D - V$ l'entreprise de type FS craint la liquidation judiciaire du projet d'investissement que le créancier garanti peut ordonner si elle ne respecte pas l'échéancier de ses remboursements à la date 1. Dans ce cas, la pertinence du défaut de paiement stratégique pour les deux parties, l'entreprise et le créancier garanti, évoulant dans un contexte d'asymétrie d'information sur la valeur des cash flows générés par le projet d'investissement, dépend de la valeur de l'offre de remboursement émise par l'entreprise (d) dans le cadre de la renégociation de sa dette (D). Nous distinguons deux cas. Premièrement, si $d < v$, il n'existe pas de comportement stratégique de la part des emprunteurs de type FS. Les deux types d'emprunteurs se séparent. Ceux de type FS remboursent et ne sont pas mis en liquidation, pendant que ceux de type FNS sont liquidés. Ce second effet résulte de ce que les prêteurs ont un avantage à liquider indépendamment de l'identité du prêteur. Deuxièmement, si $d > v$, un troisième type d'équilibre permettant l'utilisation de stratégies mixtes émerge.

Lemma 3 *Si $V > d > v$, $y_2 > D - V$ et $\theta > \frac{d-v}{V-v}$, alors l'unique équilibre est caractérisé par le triplet $(\sigma_B^*; \sigma_L^*; \mu^*)$ avec:*

$$p^* = 1 - \frac{(1-\theta)(d-v)}{\theta(V-d)}; \quad q^* = \frac{D-d}{y_2 - d + V}; \quad \mu^* = \frac{d-v}{V-v}$$

[1] En d'autres termes, le gain issu de la poursuite de l'activité (y_2) est insuffisant en comparaison du surplus qui résulte de la liquidation du projet d'investissement et du remboursement de la valeur faciale de la dette (D).

Proof. voir annexe ? ∎

A cet instant, nous endogénéisons l'offre de remboursement négociée de la dette (d) par le biais de la contrainte de participation des prêteurs. Nous supposons en effet que les prêteurs se livrent une concurrence à la Bertrand sur le marché des dettes, le coût de la ressource sur le marché des dépôts étant supposé constant et égal à c. A l'équilibre, les banques atteignent donc un profit espéré nul tel que

$$\theta\left(pD+(1-p)\left\{qV+(1-q)d\right\}\right)+(1-\theta)\left(qv+(1-q)d\right)=c \tag{1}$$

La valeur de d qui satisfait la contrainte de profit espéré nul des banques est:

$$d=\frac{c-\theta p(qV-D)-\theta q(v-V)-qv}{(1-q)(1-\theta p)}$$

La valeur de d est positive si et seulement si

$$c>(1-\theta)qv+\theta(pD+(1-p)qV)$$

c'est-à-dire si la somme du coût de la ressource sur le marché des dépôts (c) et de l'espérance de bénéfice de la banque liée à la renégociation de la dette $(\theta(1-p)(1-q)d+(1-\theta)(1-q)d)$ est supérieure à l'espérance de bénéfice de la banque qui participe à ce jeu $(\theta(pD+(1-p)(qV+(1-q)d))+(1-\theta)(qv+(1-q)d))$.

Lemma 4 *Si $y_2>D-V$, $D-V>0$ et $c\in[\theta V+(1-\theta)v,\theta D+(1-\theta)v]$, il existe un unique équilibre caractérisé par le triplet $(\sigma_B^*;\sigma_L^*;\mu^*)$ avec:*

$$\begin{aligned}
p^* &= \frac{c-\theta V-(1-\theta)v}{\theta(D-V)},\\
q^* &= \frac{(c-D)(D-V)}{cy_2+(V-v)(1-\theta)(y_2+V)-D((V-v)(1-\theta)+y_2)};\\
\mu^* &= \frac{c-\theta D-(1-\theta)v}{c-D+(1-\theta)(V-v)},\\
d^* &= \frac{cV-D\left(\theta V+(1-\theta)v\right)}{c-D+(1-\theta)(V-v)}
\end{aligned}$$

Proof. voir annexe 3. ∎

Le lemme 4 s'interprète de la manière suivante. L'équilibre en stratégies mixtes est un équilibre avec défaut stratégique de la part des emprunteurs FS qui résulte de l'intérêt divergent des prêteurs et des emprunteurs. Les prêteurs ont un avantage à renégocier la dette des firmes FNS plutôt que de les liquider; mais dans ces conditions, elles laissent aux emprunteurs de type FS l'opportunité d'adopter un comportement de renégociation stratégique de leur dette. Dans le but de limiter l'opportunisme des FS, les banques doivent alors randomiser leur comportement, ce qui induit une externalité négative sur les FNS. La séparation des deux types de firmes s'opère par la plus ou moins grande fréquence de liquidation des projets d'investissement décidée par les banques. La liquidation est coûteuse pour ces dernières dans la mesure où cette action les prive de l'offre de remboursement partiel (d) supérieure à l'équilibre qui nous intéresse à la valeur de liquidation des projets d'investissement de type FNS (v). Dans la mesure où

$$\frac{\partial d}{\partial \theta} > 0, \frac{\partial d}{\partial V} > 0, \frac{\partial d}{\partial v} > 0$$

l'accroissement de la part de firmes de type FS dans la population totale et des valeurs de liquidation des projets d'investissement augmentent les coûts de séparation (c'est-à-dire rendent la liquidation plus coûteuse par le biais de l'offre de remboursement partiel endogène). Par conséquent, la fréquence de liquidation des banques (q) diminue et le défaut de paiement stratégique devient plus fréquent. En outre, l'externalité négative sur les firmes de type FNS générée par la possibilité d'une renégociation stratégique de l'endettement est plus importante dans la mesure où d augmente.

Ces résultats sont valides sous la condition

$$c \in [\theta V + (1-\theta)v, \theta D + (1-\theta)v]$$

En effet, si le coût d'opportunité des fonds prêtés est très faible, la valeur de l'offre de remboursement partiel à l'équilibre est d'autant plus faible ($\frac{\partial d}{\partial c} > 0$). Les entreprises de type FS profitent de la faible valeur de c pour réduire effectivement d^* à condition que cette stratégie permette de favoriser le défaut de paiement stratégique et de réduire la fréquence de liquidation des banques. Or, la réduction de c peut rendre impossible ces stratégies à l'équilibre dans la mesure où une valeur trop faible de d (résultant d'une faible valeur de c) provoquera une incitation plus forte à la liquidation chez les banques et une réduction de l'incitation au défaut de paiement stratégique. La valeur seuil de c qui conditionne l'existence de l'équilibre est en fait le gain escompté des banques si les agents jouent les stratégies suivantes $\sigma_B = NR$ et $\sigma_B = L$ (soit le paiement le plus faible pour les banques). Nous justifions ensuite l'existence d'une borne supérieure à l'intervalle des valeurs admissibles pour c de la manière suivante. Un accroissement de c provoque une hausse de d^*. Désormais, c'est l'exigeance des banques en matière de rentabilité qui pousse les entreprises de type FS à proposer une offre de remboursement partiel suffisemment forte. Or, il existe une valeur de c qui décourage les entreprises à renégocier leur endettement et à adopter la stratégie R. Cette valeur seuil est le gain escompté des banques lorsque les entreprises de type FS respectent leur engagement financier à la date 1 et que les entreprises liquident systématiquement tout projet d'investissement qui génère $y_1 = 0$.

Enfin[2], dans la mesure où

$$\frac{dq}{dD} = \frac{(1-\theta)(V-v)\left[(D-V)^2 + y_2(c-2D+V)\right] + y_2(c-D)^2}{\left[y_2(c-D) + (1-\theta)(V-v)(V+y_2-D)\right]^2}$$

l'impact de D sur q dépend du signe de l'expression

$$y_2(c-D)\left((c-D) + (1-\theta)(V-v)\right) + (1-\theta)(V-v)(V-D)(V-D+y_2)$$

Ainsi une hausse de D génère une hausse du terme positif

$$y_2(c-D)\left((c-D) + (1-\theta)(V-v)\right)$$

et une baisse du terme positif

$$(1-\theta)(V-v)(V-D)(V-D+y_2)$$

L'impact de D sur q résulte donc d'un arbitrage entre l'impact de cette variation sur $(c-D)$ et son impact sur $(V-D-y_2)$. Dans le premier cas, une hausse de D pousse les banques à liquider davantage puisque la perte liée au comportement stratégique des firmes de type FS $(D-d)$ augmente. Dans le second cas, une hausse de D renforce l'incitation des firmes de type FS à renégocier D qui génère une hausse des coûts de séparation au même titre que les effets de θ, V et v sur la fréquence de liquidation des banques sur la valeur de l'offre de remboursement partiel à l'équilibre (d^*). Dans ce dernier cas, une hausse de D a donc un impact négatif sur q.

5 L'équilibre avec renégociation de la dette et risque juridique

Nous supposons désormais que dans le cas où les banques jouent la stratégie L, les deux parties se trouvent devant un tribunal qui a le choix entre deux stratégies pures: accepter la liquidation (a) et refuser la liquidation (r), c'est-à-dire imposer la continuation en validant la valeur d issue de la renégociation de la dette D. Le tribunal n'est cependant pas un audit parfait du type de

[2] En effet, $\frac{d(1-p)}{dD} = \frac{c-\theta V-(1-\theta)v}{(D-V)^2\theta}$, $\frac{d(1-p)}{dV} = \frac{\theta D+(1-\theta)v-c}{(D-V)^2\theta}$, $\frac{d(1-p)}{dv} = \frac{(1-\theta)}{(D-V)\theta}$, $\frac{d(1-p)}{dc} = -\frac{1}{(D-V)\theta}$ et $\frac{d(1-p)}{d\theta} = \frac{c-v}{(D-V)^2\theta}$.
$\frac{dq}{dc} = \frac{(D-V)(V-v)(1-\theta)(y_2-D+V)}{(cy_2+(1-\theta)(V-v)(V+y_2)-D((1-\theta)(V-v)+y_2))^2}$, $\frac{dq}{d\theta} = -\frac{(c-D)(D-V)(V-v)(D-V-y_2)}{(cy_2+(1-\theta)(V-v)(V+y_2)-D((1-\theta)(V-v)+y_2))^2}$, $\frac{dq}{dV} = \frac{(c-D)(D-V)^2(1-\theta)-(c-D)y_2(c-\theta D-(1-\theta)v)}{(cy_2+(1-\theta)(V-v)(V+y_2)-D((1-\theta)(V-v)+y_2))^2}$, $\frac{dq}{dv} = \frac{(c-D)(D-V)(1-\theta)(y_2-D+V)}{(cy_2+(1-\theta)(V-v)(V+y_2)-D((1-\theta)(V-v)+y_2))^2}$, $\frac{dq}{dy_2} = -\frac{(c-D)(D-V)(c-D-(1-\theta)(v-V))}{(cy_2+(1-\theta)(V-v)(V+y_2)-D((1-\theta)(V-v)+y_2))^2}$
$\frac{dd}{d\theta} = \frac{(c-D)(D-V)(v-V)}{(c-D+(1-\theta)(V-v))^2}$, $\frac{dd}{dV} = \frac{(c-D)(c-\theta D-(1-\theta)v)}{(c-D+(1-\theta)(V-v))^2}$, $\frac{dd}{dv} = \frac{(c-D)(D-V)(-1+\theta)}{(c-D+(1-\theta)(V-v))^2}$, $\frac{dd}{dD} = \frac{(V-v)(1-\theta)(c-\theta V-(1-\theta)v)}{(c-D+(1-\theta)(V-v))^2}$, $\frac{dd}{dc} = \frac{(D-V)(V-v)(1-\theta)}{(c-D+(1-\theta)(V-v))^2}$.

l'emprunteur. Au risque comptable s'ajoute un risque juridique. Précisément, avec une probabilité s, le tribunal joue a lorsque les banques demandent la liquidation d'un emprunteur de type FS. En d'autres termes, avec une probabilité s, le tribunal commet une erreur de type 2 dans la mesure où il ordonne la liquidation d'un emprunteur de type FS. Face à des banques qui prononcent la liquidation d'un emprunteur de type FNS, le tribunal commet une erreur de type 1 lorsqu'il ordonne la continuation d'un emprunteur de type FNS avec une probabilité égale à $1-t$. Dans ce dernier cas, le tribunal valide le montant de dette renégocié entre l'emprunteur et ses banques. Les paiements des joueurs sont les suivants :

$$\begin{array}{ll} u_{FS}(NR, L, a) = y_1 - V & u_{FS}(NR, L, r) = y_1 + y_2 - D - F \\ u_C(FS, NR, L, a) = V & u_C(FS, NR, L, r) = D \\ u_{FNS}(NR, L, a) = -v & u_{FNS}(NR, L, r) = y_2 - d \\ u_C(FNS, NR, L, a) = v & u_C(FNS, NR, L, r) = d \end{array}$$

Nous notons F la valeur de la sanction monétaire prononcée par le tribunal à l'égard de l'emprunteur de type FS qui a choisi le défaut de paiement stratégique. Il n'existe pas dans notre modèle de clause de responsabilité limitée à l'égard des deux types d'emprunteurs. Enfin, nous ne précisons pas la fonction objectif du tribunal de manière explicite. Nous considérons uniquement que le risque d'erreur est influencé par la clémence du tribunal à l'égard des entreprises en difficulté. Par exemple, un système pro débiteur de traitement des faillites est plus enclin à pousser les entreprises vers la continuation afin de sauvegarder les emplois liés au projet d'investissement en question et donc à commettre des erreurs de type 1. A l'inverse, un système pro créancier tend à commettre davantage d'erreurs de type 2 en facilitant la liquidation des entreprises qui traversent simplement une crise de liquidité.

Au vu de la nouvelle structure du jeu, il existe pour les emprunteurs de type FS une incitation à demander la renégociation de la dette (jouer NR est une stratégie strictement dominante) seulement si la condition $y_1 + y_2 - D < s(y_1 - V) + (1-s)(y_1 + y_2 - D - F)$ est vérifiée. Cette condition s'écrit également $y_2 > \frac{s(D-V)-(1-s)F}{s}$. Dans le cas contraire, le remboursement de la dette est une stratégie strictement dominante pour l'emprunteur FS et il n'y aura jamais demande de renégociation de la dette. De leur côté, les prêteurs disposent d'une stratégie strictement dominante, indépendante de ses croyances sur l'identité de l'emprunteur, uniquement sous les deux conditions $sV + (1-s)D > d$ et $tv + (1-t)d > d$. La seconde condition est équivalente à $v > d$. Sous ces deux conditions, la banque préfère toujours jouer L. Au contraire si $d > v$ et $sV + (1-s)D > d$, la meilleure décision des prêteurs dépend du type de l'emprunteur: la banque préfèrera L si elle pense que l'emprunteur est du type FS (si elle se trouve au noeud à gauche de son ensemble d'information), mais elle préfèrera NL si elle pense que l'emprunteur est de type FNS (si elle se trouve au noeud à droite de son ensemble d'information). On en déduit immédiatement l'existence de deux premiers types d'équilibres, excluant l'utilisation de stratégies mixtes.

Lemma 5 *Si* $v > d$ *et* $y_2 > \frac{s(D-V)-(1-s)F}{s}$*, alors l'unique équilibre est caractérisé par* $(\sigma_B = R, \sigma_L = L)$*, associé à la croyance* $\mu = 0$*. Si* $y_2 < \frac{s(D-V)-(1-s)F}{s}$*, alors l'unique équilibre est caractérisé par* $(\sigma_B = NR, \sigma_L = L)$*, associé à la croyance* $\mu = 1$*.*

Proof. voir annexe 4. ■

Corollary 6 *Les emprunteurs de type* FNS *sont mis en liquidation par les prêteurs.*

Désormais, si $y_2 < \frac{s(D-V)-(1-s)F}{s}$, c'est-à-dire si le gain de l'entreprise de type FS en cas de continuation de son projet d'investissement est strictement inférieur à son gain dans le cadre d'une liquidation de même projet, la firme de type FS a obligatoirement une stratégie pure dominante qui consiste à ne pas respecter son engagement financier à la date 1 (ou choisir l'action NR). Le comportement de faillite stratégique conduit au pooling des emprunteurs en raison de la convergence des intérêts des emprunteurs de type FS et des prêteurs. Le cas rival nous intéresse davantage. Si $y_2 > \frac{s(D-V)-(1-s)F}{s}$ l'entreprise de type FS craint la liquidation judiciaire du projet d'investissement que le créancier garanti peut ordonner si elle ne respecte pas l'échéancier de ses remboursements à la date 1. De nouveau, on distongue deux cas selon les valeurs de d et v. Premièrement, si $v > d$ et $sV + (1-s)D > d$[3], il n'existe pas de comportement stratégique de la part des emprunteurs de type FS. Les deux types d'emprunteurs se séparent. Ceux de type FS remboursent et ne sont pas mis en liquidation, pendant que ceux de type FNS sont liquidés. Ce second effet résulte de ce que les prêteurs ont un avantage à liquider indépendamment de l'identité du prêteur. Deuxièmement, si $d > v$, un troisième type d'équilibre permettant l'utilisation de stratégies mixtes émerge. De nouveau, nous endogénéisons la valeur de d par le biais de la contrainte de participation des créanciers. En revanche, nous séparons l'étude du risque juridique lié aux erreurs de type 2 de celui lié aux erreurs de type 1. Enfin, si on compare la valeur seuil de y_2 pour laquelle l'emprunteur de type FS choisit le défaut de paiement stratégique selon qu'on intègre ou non un risque juridique dans le modèle, il apparaît que le niveau de sanction F réduit la valeur seuil de y_2 pour laquelle l'emprunteur FS choisit la stratégie NR ($D - V > \frac{s(D-V)-(1-s)F}{s}$). Ainsi, la possibilité de sanctionner les entreprises pour leur comportement stratégique réduit leur incitation à se comporter de la sorte .

5.1 Le cas des erreurs de type 2 ($t = 1$ et $s > 0$)

La variable s qui est la probabilité que le tribunal commette une erreur de type 2 (c'est-à-dire liquide une entreprise saine) est une proxy du caractère pro créancier/ pro débiteur de la procédure collective de traitement des difficultés

[3] Ces deux conditions se résument à une seule : $v > d$.

des entreprises. A priori, une valeur faible de s correspond à un système pro débiteur dans la mesure où le tribunal a tendance à invalider la décision des banques quant à l'avenir des firmes incapables de rembourser leurs dettes à la date 1.

Lemma 7 *Si $D > V$, $y_2 > (D-V) - \frac{(1-s)F}{s}$ et $c \in [\theta D + (1-\theta)v - \theta s(D-V), \theta D + (1-\theta)v]$ alors l'unique équilibre est caractérisé par le triplet $(\sigma_B^*; \sigma_L^*; \mu^*)$ avec:*

$$\begin{aligned}
p^* &= \frac{c - \theta D - (1-\theta)v + s\theta(D-V)}{s\theta(D-V)} \\
d^* &= \frac{(sV + (1-s)D)(c-\theta D) - (1-\theta)Dv}{c - \theta D - (1-\theta)(v + s(D-V))} \\
q^* &= \frac{D - \frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}}{s(y_2 - D + V) + (1-s)F + D - \frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}} \\
\mu^* &= \frac{c - \theta D - (1-\theta)v}{c - \theta D - (1-\theta)(v + s(D-V))}
\end{aligned}$$

Proof. voir annexe 5. ■

L'étude de l'impact de s sur les variables endogènes du modèle révèle[4]

$$\frac{\partial d}{\partial s} < 0, \frac{\partial(1-p)}{\partial s} < 0, \frac{\partial \mu}{\partial s} < 0$$

En outre[5], si $y_2 > D - V$

$$\frac{\partial q}{\partial s} > 0 \text{ si } F > \frac{s^2(1-\theta)(D-V)(D-V-y_2)}{c - \theta D - (1-\theta)v - s^2(1-\theta)(D-V)}$$

Proof. voir annexe 6. ■

Si $s = 1$ on retrouve les résultats énoncés dans le lemme 4. En revanche, si $0 < s < 1$, on introduit un risque juridique dans la mesure où on autorise une réduction par un tiers (ici un tribunal imparfait) de l'occurrence des erreurs de type 2. Au vu des résultats de statique comparative, il apparaît que l'introduction d'un tribunal pro débiteur (qui réduit le risque d'erreur de type 2) augmente les coûts de séparation ($\frac{\partial d}{\partial s} < 0$) et l'externalité négative de la renégociation de l'endettement sur les firmes de type FNS. La raison est simple. Les firmes de type FS doivent augmenter la valeur de d^* dans la mesure où les banques, si elles liquident un projet d'investissement de type FS, escomptent obtenir D au lieu de V (par hypothèse $D > V$) puisque le tribunal avec une probabilité $(1-s)$ ordonne le respect des termes du contrat de dette initial ou

[4] $1 - p$ est la probabilité de défaut de paiement stratégique des firmes saines.

[5] On peut également exprimer les résultats en fonction de y_2 et non plus de F. Dans ce cas, il apparaît que $\frac{dq}{ds} > 0$ si $y_2 \in [D - V - \frac{1-s}{s}F, D - V + F]$. En outre, si $y_2 > D - V + F$ tel que $\left[F(c - \theta D - (1-\theta)v) + s^2(1-\theta)(V-D)(F + D - V - y_2)\right] > 0$ alors $\frac{dq}{ds} < 0$.

empêche la liquidation pour une valeur V. Cette hausse des coûts de séparation générée par un système pro débiteur accroît l'occurrence du défaut de paiement stratégique et réduit la fréquence de liquidation des banques. Néanmoins, il existe un niveau de sanction (F) suffisemment faible pour que $\frac{\partial q}{\partial s} < 0$. En effet, plus la valeur de F est faible (précisément $F < \frac{s^2(1-\theta)(D-V)(D-V-y_2)}{c-\theta D-(1-\theta)v-s^2(1-\theta)(D-V)}$), plus la liquidation d'un projet d'investissement de type FS s'apparente au respect du contrat de dette initial (c'est-à-dire le versement de D aux créanciers). Par conséquent, les banques augmentent leur fréquence de liquidation (q) puisque la perte des créanciers liée au fait que $D < V$ s'estompe, les firmes de type FS ne pouvant pas augmenter davantage la valeur de remboursement partiel d.

5.2 Le cas des erreurs de type 1 ($s = 0$ et $0 < t < 1$)

Nous étudions désormais l'impact des erreurs de type 1 sur la renégociation stratégique de l'endettement de nos acteurs. Nous supposons que $s = 0$ afin d'éliminer le risque d'erreur de type 2. Le défaut de paiement stratégique est encore une stratégie possible pour l'entreprise de type FS. La différence par rapport au cadre d'analyse précédent est que le refus par la banque de la proposition de remboursement partiel de la dette (d) se traduit désormais non plus par la liquidation de la firme pour une valeur V mais par la continuation de cette dernière assortie d'une sanction pour renégociation stratégique de la dette et d'un respect des termes du contrat de dette initial. En d'autres termes, le tribunal refuse systématiquement la liquidation des projets d'investissement de type FS en cas d'échec de la renégociation extra-judiciaire de la dette. Ensuite, la variable $1-t$ est la probabilité que le tribunal commette une erreur de type 1 (c'est-à-dire empêche la liquidation d'un projet d'investissement de type FNS alors même que les créanciers la demandent). De nouveau, t est une proxy du caractère pro créancier/ pro débiteur de la procédure collective de traitement des difficultés des entreprises. A priori, une valeur faible de t correspond à un système pro débiteur dans la mesure où le tribunal a, avec une probabilité $(1-t)$, tendance à invalider la décision de liquidation par les banques des firmes incapables de rembourser leur dette à la date 1.

Lemma 8 *Si $D-v > 0$ et $c \in [\theta D+(1-\theta)v, \frac{\theta D+tv(1-\theta)}{\theta+(1-\theta)t}]$ alors l'unique équilibre est caractérisé par le triplet $(\sigma_B^*; \sigma_L^*;\mu^*)$ avec:*

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{c(\theta+(1-\theta)t)-\theta D-tv(1-\theta)}{\theta(c-tv(1-\theta)-D(1-(1-\theta)t))} \\
d &= \frac{c-\theta D-(1-\theta)tv}{(1-t)(1-\theta)} \\
q &= \frac{c-D-(1-\theta)t(v-D)}{c-D-(1-\theta)\left[t\,(v-D)+(1-t)F\right]} \\
\mu &= \frac{t(c-\theta D-(1-\theta)v)}{(1-t)(D-c)}
\end{aligned}
$$

Proof. voir annexe 7. ■

Si on étudie l'impact du risque d'erreur de type 1 sur les variables endogènes du modèle, on obtient

$$\frac{\partial d}{\partial t} > 0, \frac{\partial \mu}{\partial t} > 0, \frac{\partial p}{\partial t} < 0 \text{ et } \frac{\partial q}{\partial t} < 0$$

L'intervention d'un tribunal pro débiteur ou l'accroissement du risque d'erreur de type 1 renforce mécaniquement l'occurrence d'une renégociation de l'endettement des firmes de type FNS qu'on juge profitable, par hypothèse, pour les banques. De la sorte, le tribunal réduit les coûts de séparation (en effet $\frac{\partial d}{\partial t} > 0$). Les créanciers peuvent alors renforcer leur menace de liquidation face aux entreprises qui déclarent des difficultés de paiement à la date 1 ($\frac{\partial q}{\partial t} < 0$). Il en résulte une dissuasion plus forte du défaut de paiement stratégique ($\frac{\partial(1-p)}{\partial t} > 0$). Enfin, l'accroissement de la fréquence des erreurs de type 1 réduit l'ampleur de l'externalité négative liée au comportement stratégique des FS.

6 Impact du défaut de paiement stratégique sur le bien être social

Il s'agit dans cette partie de montrer l'impact sur le bien être collectif de la possibilité pour une entreprise de renégocier stratégiquement son contrat de dette.

6.1 Comparaison des niveaux de bien être social en l'absence de risque juridique

Pour comprendre les conditions sous lesquelles l'introduction d'une renégociation de la dette accroît le bien être collectif (c'est-à-dire la somme des paiements des deux types d'entreprises et des banques), nous nous concentrons sur l'équilibre qui émerge sous les conditions $v < d$ et $y_2 > D - V$. En effet, si $y_2 > D - V$ et $d < v$ les stratégies pures des joueurs à l'équilibre sont identiques en l'absence ou non d'une possibilité de renégociation de la dette à la date 1.

Lemma 9 *Sous la condition* $c < D - (1-\theta)y_2$ *ou* $D - V < y_2 < \frac{D-c}{1-\theta}$[6], *on peut écrire :* $BE_{AR} - BE_{SR} > 0$ *ssi*

$$\frac{(D-c)\left[(D-c)-(1-\theta)\,y_2\right]}{(1-\theta)\left((D-c)-(1-\theta)\,(y_2-D+V)\right)} < V - v$$

[6] La condition $c < D-(1-\theta)y_2$ s'écrit également $y_2 < \frac{D-c}{1-\theta}$. Or, par hypothèse $y_2 > D-v$ et on démontre aisément que $\frac{D-c}{1-\theta} > D - V$. Par conséquent, l'inégalité tient pour une valeur de y_2 telle que $D - V < y_2 < \frac{D-c}{1-\theta}$.

Proof. voir annexe 6. ■

L'introduction d'une possibilité pour les entreprises de renégocier leur endettement s'avère d'autant plus profitable collectivement que

- les gains de chaque firme associés à la poursuite de l'activité (y_2) sont élevés
- dans la mesure où $V > d > v$, le gain des banques associé à la liquidation des firmes de type FNS (v) est faible.
- l'exécution de la menace de liquidation du projet d'investissement par les banques en cas de défaut de paiement stratégique génère un paiement élevé pour les créanciers (V).

Ainsi, la possibilité de renégocier la dette accroît le bien-être collectif pour une valeur faible de y_2 ($y_2 < \frac{D-c}{1-\theta}$) à condition que l'écart $V-v$ soit suffisemment élevé pour compenser la faiblesse du gain lié à la poursuite de l'activité capturé par les débiteurs ($V - v > \frac{(D-c)[(D-c)-(1-\theta)y_2]}{(1-\theta)((D-c)-(1-\theta)(y_2-D+V))}$). A l'inverse, si cet écart est trop faible ($V - v < \frac{(D-c)[(D-c)-(1-\theta)y_2]}{(1-\theta)((D-c)-(1-\theta)(y_2-D+V))}$), la valeur de y_2 doit être supérieure à $\frac{D-c+(1-\theta)(D-V)}{(1-\theta)}$ pour que $BE_{AR}-BE_{SR} > 0$. Il existe un troisième cas défini par $\frac{D-c}{1-\theta} < y_2 < \frac{D-c+(1-\theta)(D-V)}{(1-\theta)}$ pour lequel la condition $BE_{AR} - BE_{SR} > 0$ est satisfaite sans conditions supplémentaires sur les paramètres exogènes V et v. Ce cas correspond à un partage "plus équilibré" entre les joueurs du surplus associé à la renégociation de l'endettement à la date 1.

6.2 Comparaison des niveaux de bien être social en présence de risque juridique

La condition sous laquelle la renégociation de la dette peut accroître le bien-être collectif dépend des paramètres exogènes qui décrivent d'une part, les gains associés à la continuation pour les firmes quel que soit le type du projet d'investissement entrepris (y_2) et les créanciers (d) et, d'autre part, le gain des créanciers lié à la liquidation des firmes de type FS qui sert de menace afin de réduire l'incitation au défaut de paiement stratégique (V). Nous étudions dans cette partie l'impact du risque juridique sur cette condition. Nous présentons successivement les résultats dans le cas des erreurs de type 2 puis celui des erreurs de type 1.

6.2.1 En présence d'erreurs de type 2 ($s > 0$ et $t = 1$)

Lemma 10 *En présence d'erreurs de type 2 et sous les hypothèses régissant l'existence d'un EBP en stratégies mixtes dans le cas où $s > 0$ et $t = 1$ (précisément, $y_2 > (D - V) - \frac{(1-s)F}{s}$, $D - V > 0$ et $c \in [\theta D + (1 - \theta)v - \theta s(D - V), \theta D + (1 - \theta)v]$) on a $BE_{AR} - BE_{SR} > 0$.*

Proof. voir annexe 10 ■

Par rapport à la situation sans risque juridique ($s = t = 1$ c'est-à-dire en présence d'erreurs de type 2 et l'absence d'erreurs de type 1), la réduction de la fréquence des erreurs de type 2 ou l'introduction d'un tribunal pro débiteur permet à la renégociation de l'endettement d'accroître le bien-être social par rapport à une situation où la renégociation de l'endettement est impossible, sans aucune condition supplémentaire (c'est-à-dire par rapport aux conditions d'existence de l'équilibre bayésien parfait en stratégies mixtes) sur les paramètres exogènes du modèle. En effet, un tribunal pro débiteur renforce le gain escompté des firmes de type FS (elles poursuivent leur activité avec une probabilité $(1-s)$ lorsque les créanciers demandent leur liquidation) et renforce également le gain des créanciers lorsqu'ils concrétisent leur menace de liquidation auprès des firmes de type FS (ils percoivent D au lieu de V avec une probabilité $(1-s)$). Ces deux effets compensent l'éventuelle faiblesse du gain relatif des banques associé à la non liquidation des firmes de type FNS $(d-v)$.

6.2.2 En présence d'erreurs de type 1 ($s = 0$ et $t > 0$)

Lemma 11 *En présence d'erreurs de type 1, si*

$$y_2 < \frac{t}{1-t}\left(c - \theta D - (1-\theta)v\right) - \theta y_1$$

on a $BE_{AR} - BE_{SR} > 0$ *ssi*

$$F < \frac{(\theta y_1 + y_2 - (1-\theta)ty_2)(D - (1-\theta)t(D-v) - c)}{(1-\theta)\left(t(c - \theta D - (1-\theta)v) - (1-t)(y_2 + \theta y_1)\right)}$$

Si

$$y_2 > \frac{t}{1-t}\left(c - \theta D - (1-\theta)v\right) - \theta y_1$$

$BE_{AR} - BE_{SR} > 0$ *quelle que soit la valeur de* F.

Proof. voir annexe 9 ■

Désormais, nous comparons le bien-être collectif entre une situation où la renégociation est impossible (les firmes liquident systématiquement les projets d'investissement et les entreprises de type FS respectent leur engagement c'est-à-dire jouent R) et une situation décrite par ($s = 0$ et $t > 0$) c'est-à-dire où les erreurs de type 2 sont impossibles et le tribunal commet des erreurs de type 1. L'apparition d'erreurs de type 1 profitent aux créanciers puisqu'elles leur assurent à cette occasion un paiement égal à d qui est supérieur strictement à v le gain qu'elles obtiennent en cas de liquidation mais sans erreurs de type 1. En outre, sous l'hypothèse $s = 0$, lorsque les banques liquident le projet d'investissement des firmes de type FS ces dernières sont systématiquement sanctionnées par le paiement obligatoire F et le respect des termes du contrat de dette (verser D aux banques). Par conséquent, l'introduction d'une renégociation de l'endettement à la date 1 augmentera le bien-être collectif à condition que le niveau de sanction F qui incite ces dernières à rembourser D ne soit pas trop élevé par rapport au gain lié à la continuation pour ces dernières. Le lemme 11 indique les valeurs seuil pour F et y_2. Par exemple, si $y_2 < \frac{t}{1-t}(c - \theta D - (1-\theta)v) - \theta y_1$ le montant de la sanction F ne doit pas dépasser $\frac{(\theta y_1 + y_2 - (1-\theta)ty_2)(D-(1-\theta)t(D-v)-c)}{(1-\theta)(t(c-\theta D-(1-\theta)v)-(1-t)(y_2+\theta y_1))}$ afin que la renégociation de l'endettement augmente le bien-être collectif lorsque la liquidation d'un projet d'investissement de type FS se solde automatiquement par une sanction égale à F.

7 Conclusion

Dans ce papier, nous démontrons que les entreprises ne renégocient pas leur dette uniquement lorsque le gain associé à cette stratégie est strictement supérieur au gain associé au respect des termes du contrat de dette initial. Le défaut de paiement stratégique des firmes peut également résulter de l'intérêt divergent des prêteurs et des emprunteurs lorsque les prêteurs ont un avantage à renégocier la dette de certaines firmes plutôt que de liquider le projet d'investissement financé. Dans ces conditions, les banques laissent aux emprunteurs les plus solvables l'opportunité d'adopter un comportement de renégociation stratégique de leur dette. Dans le but de limiter l'opportunisme de celles-ci, les banques doivent alors randomiser leur comportement ce qui induit une externalité négative sur les firmes les moins saines. La séparation des deux types de firmes s'opère ainsi par la plus ou moins grande fréquence de liquidation des projets d'investissement décidée par les banques. Nous démontrons également que l'orientation du tribunal (soit pro débiteur, soit pro créancier) a un impact sur l'occurrence du défaut de paiement stratégique et les stratégies des créanciers. En introduisant ce risque juridique, nous montrons qu'un système pro débiteur de traitement des défaillances a deux effets. En réduisant la fréquence des erreurs de type 2, il accroît la fréquence des défauts de paiements stratégique dans la mesure où les coûts de séparation entre les deux types de firmes augmentent. A l'inverse, en augmentant le risque d'erreurs de type 1, il réduit la fréquence du défaut de paiement stratégique dans la mesure où les coûts de séparation diminuent dans ce cas. Enfin, nous précisons les conditions sous lesquelles la possibilité offerte aux entreprises de renégocier leur contrat de dette permet d'accroître le bien-être collectif.

References

[1] Alary, D., Gollier, C. (2004), Debt Contract, Strategic Default and Optimal Penalties with Judgment Errors, *Annals of Economics and Finance*, 5, p. 357-372.

[2] Bolton, P., Scharfstein, D.S., (1996), Optimal debt structure and the number of creditors, *Journal of Political Economy,* 104, p. 1-25.

[3] Longhofer, S.D., Peters, S.R., (2000), Protection for whom?creditor conflict and bankruptcy, *Federal Reserve Bank of Cleveland Working Paper.*

[4] Povel, P., (1999), Optimal soft or tough bankruptcy procedures, *Journal of Law, Economics and Organization,* 15(13), p. 659-684.

[5] Recasens, G., (2001), Aléa moral, financement par dette bancaire et clémence de la loi sur les défaillances d'entreprises, *Finance,* 22 (1), p. 64-86.

8 Annexes

8.1 Démonstration du lemme 1

Il est immédiat que si $v > d$ les prêteurs n'ont aucune incitation à jouer une stratégie mixte puisqu'ils disposent d'une stratégie strictement dominante: jouer L. Le comportement des emprunteurs de type FS va alors dépendre de la différence entre le gain additionnel que leur rapporte la continuation lorsqu'ils déclarent correctement leur capacité à rembourser en date 2 par rapport à leur gain additionnel lorsqu'ils déclarent frauduleusement un défaut de paiement. Quand $y_2 - D > -V$, la déclaration correcte de leur type est une stratégie dominante pour les emprunteurs FS. La croyance rationnelle du prêteur est alors telle qu'un emprunteur qui demande à renégocier ne peut-être qu'un emprunteur de type FNS. Le couple de stratégies (L, R) associé à la croyance $\mu = 0$ est alors l'unique EBP du jeu.

Si $y_2 - D < -V$ alors la continuation avec déclaration correcte de leur type est une stratégie dominée strictement pour les emprunteurs FS; ils choisiront alors en date 2 NR. Indépendamment de l'hypothèse $v > d$, ou $v < d$, la seule croyance qui peut être formée à l'équilibre par la banque est $\mu = 1$. La banque préfère alors jouer la liquidation indépendamment du type de l'emprunteur. Le couple de stratégies (L, NR) associé à la croyance $\mu = 1$ est alors l'unique EBP du jeu.

8.2 Démonstration du lemme 3

Si $V > d > v$, on a vu que la meilleure décision des prêteurs dépend du type de l'emprunteur: la banque préfèrera L si elle anticipe que l'emprunteur est du type FS, mais elle préfèrera NL si elle anticipe que l'emprunteur est de type FNS. Compte tenu de la croyance sur le type inobservable de l'emprunteur, on a les préférences suivantes pour les prêteurs:

$$
\begin{aligned}
L &\succ NL \Leftrightarrow \mu > \frac{d-v}{V-v} \\
NL &\succ L \Leftrightarrow \mu < \frac{d-v}{V-v}
\end{aligned}
$$

où $\frac{d-v}{V-v}$ est la croyance pour laquelle les prêteurs sont indifférents entre liquider et renégocier, soit: $\mu V + (1-\mu)v = d$. On a alors trois cas possibles déterminés par les valeurs admissibles à l'équilibre de μ:

CAS 1: considérons une situation où $\mu^* > \frac{d-v}{V-v}$.

Si $y_2 > D - V$, la meilleure réponse des FS à L est de jouer R avec une probabilité $p = 1$: mais alors ceci contredit la croyance des emprunteurs $\mu > 0$.

Evidemment, si $y_2 < D - V$ on retrouve comme unique équilibre du jeu, l'équilibre pooling en stratégies pures donné par $(\sigma_L = L; \sigma_B = NR)$, associé à la croyance $\mu = 1$.

CAS 2: considérons une situation où $\mu^* < \frac{d-v}{V-v}$

Les prêteurs préférant ne pas liquider, il est facile de vérifier qu'il n'existe aucun équilibre dans ce cas supporté par cette condition sur la croyance du prêteur: quel que soit le signe de $y_2 - D + V$, alors la meilleure réponse des emprunteurs FS est la stratégie pure NR (qui donne le paiement maximum: $y_1 + y_2 - d$,) ce qui contredit l'hypothèse $\mu < 1$.

CAS 3: considérons une situation où $\mu^* = \frac{d-v}{V-v}$

La stratégie mixte d'équilibre du prêteur doit rendre un emprunteur de type FS indifférent entre rembourser et ne pas rembourser:

$$y_1 + y_2 - D = q(y_1 - V) + (1-q)(y_1 + y_2 - d)$$

de telle sorte que la probabilité d'équilibre du prêteur est donnée par:

$$q^* = \frac{D-d}{y_2 - d + V}$$

On vérifie que sous la condition $y_2 > D - V$, alors $q^* \in]0,1[$.

En appliquant enfin la règle de Bayes, on a[7]:

$$\mu^* = \frac{(1-p)\theta}{(1-p)\theta + (1-\theta)}$$

qui établit la relation entre la croyance du prêteur sur le type de l'emprunteur et la stratégie mixte de l'emprunteur. Comme par ailleurs, on a aussi:$\mu^* = \frac{d-v}{V-v}$, on obtient en résolvant par rapport à la probabilité d'équilibre des emprunteurs:

$$p^* = \frac{\theta - \mu^*}{(1-\mu^*)\theta} = 1 - \frac{(1-\theta)(d-v)}{\theta(V-d)}$$

On voit que puisque $d > v$ alors $p^* < 1$; par ailleurs, la condition $\theta > \frac{d-v}{V-v}$ nous assure que $p^* > 0$. Le résultat du lemme en découle.

[7] Par définition, μ est la croyance du prêteur concernant le type de l'emprunteur, conditionnellement au fait qu'il se trouve au noeud de décision à gauche de son ensemble d'information:

$$\mu = P(FS|n_1) = \frac{P(FS, n_1)}{P(n_1)}$$

8.3 Démonstration du lemme 4

D'après le lemme 3, si $V > d > v$, $y_2 > D - V$ et $\theta > \frac{d-v}{V-v}$, alors l'unique équilibre est caractérisé par le triplet $(\sigma_B^*;\sigma_L^*;\mu^*)$ avec:

$$p^* = 1 - \frac{(1-\theta)(d-v)}{\theta(V-d)}; \quad q^* = \frac{D-d}{y_2-d+V}; \quad \mu^* = \frac{d-v}{V-v}$$

Si on endogénéise d il suffit de résoudre le système de 4 équations à 4 inconnues suivant et de vérifier que les solutions obtenues respectent les conditions d'existence de l'équilibre.

$$p^* = 1 - \frac{(1-\theta)(d-v)}{\theta(V-d)}; \; q^* = \frac{D-d}{y_2-d+V}; \; \mu^* = \frac{d-v}{V-v}; d = \frac{c-\theta p(qV-D)-\theta q(v-V)-qv}{(1-q)(1-\theta p)}$$

Il existe une seule solution possible (on trouve en fait deux solutions au couple (p,d)), la première est

$$\begin{aligned}
d &= \frac{cV - D\left(\theta V + (1-\theta)v\right)}{c - D + (1-\theta)(V-v)} \\
p &= \frac{c - \theta V - (1-\theta)v}{\theta(D-V)} \\
q &= \frac{(c-D)(D-V)}{cy_2 + (V-v)(1-\theta)(y_2+V) - D((V-v)(1-\theta)+y_2)} \\
\mu &= \frac{c - \theta D - (1-\theta)v}{c - D + (1-\theta)(V-v)}
\end{aligned}$$

La seconde solution du système est impossible car le couple trouvé $d = V + y_2$; $p = \frac{y_2+(1-\theta)(V-v)}{\theta y_2}$ implique que q tende vers l'infini.

Il s'agit de vérifier les conditions d'existence de l'équilibre défini dans le lemme 3 pour une valeur de d particulière, précisément $d* = \frac{cV-D(\theta V+(1-\theta)v)}{c-D+(1-\theta)(V-v)}$. Cette valeur de d est strictement positive si $c < \frac{D}{V}(\theta V + (1-\theta)v)$ (1) ou $c > D - (1-\theta)(V-v)$ (2).

Sous quelle condition, $d > v$?

Dans le cas (1), $d > v \iff c < \theta D + (1-\theta)v < \frac{D}{V}(\theta V + (1-\theta)v)$. Dans le cas (2), $d > v \iff c > D - (1-\theta)(V-v)$. En résumé, si $c \in]-\infty, \theta D + (1-\theta)v] \cup [D - (1-\theta)(V-v), +\infty[$ alors $d > v$.

Sous quelle condition, $V > d$?

Dans le cas (1), $V > d \iff (V-v)(1-\theta)(D-v) > 0$. Cette condition est satisfaite sous l'hypothèse $D > V$. Dans le cas (2), $V > d \iff (V-v)(1-\theta)(D-v) < 0$. Dans la mesure où nous avons supposé que $D > V$, c'est-à-dire que le montant de la dette échue est inférieure strictement au montant maximal que la banque est en mesure d'obtenir si elle concrétise sa menace de liquidation de l'entreprise, la condition $V > d$ ne peut pas être satisfaite dans le cas (2). Dès

lors, si $c \in]-\infty, \theta D + (1-\theta)v]$, on a $V > d > v$.
Sous quelles conditions les probabilités p^* et q^* sont elles comprises entre 0 et 1 ?

$p^* > 0 \Leftrightarrow c > \theta V + (1-\theta)v$ et $p^* < 1 \Leftrightarrow c < \theta D + (1-\theta)v$. Dans la mesure où $D > V$ on a $\theta D + (1-\theta)v > \theta V + (1-\theta)v$. L'inégalité $p^* > 0$ est donc satisfaite sous l'hypothèse $c \in]-\infty, \theta D + (1-\theta)v]$. Si on tient compte de la condition sous laquelle $p^* < 1$, on a désormais $V > d > v$, $0 \leq p \leq 1$ si $c \in [\theta V + (1-\theta)v, \theta D + (1-\theta)v]$.
Enfin, $q^* > 0$ sous la condition $c \in [\theta V + (1-\theta)v, \theta D + (1-\theta)v]$ dans la mesure où au numérateur $D - V > 0$ et $c - D < 0$ puisque $\theta D + (1-\theta)v < D$. Au dénominateur, $cy_2 + (V-v)(1-\theta)(y_2+V) - D((V-v)(1-\theta)+y_2) < 0 \Leftrightarrow c < \frac{1}{y_2}(Dy_2 + (1-\theta)(V-v)(D-V-y_2))$. Puisque $\frac{1}{y_2}(Dy_2 + (1-\theta)(V-v)(D-V-y_2)) > \theta V + (1-\theta)v$, l'inégalité $cy_2 + (V-v)(1-\theta)(y_2+V) - D((V-v)(1-\theta)+y_2) < 0$ est satisfaite sous l'hypothèse $c \in [\theta V + (1-\theta)v, \theta D + (1-\theta)v]$. Sous cette même condition, on vérifie plus aisément que $\mu^* = \frac{c-\theta D-(1-\theta)v}{c-D+(1-\theta)(V-v)}$ vérifie $0 < \mu^* < 1$

8.4 Démonstration du lemme 5

i) Il est immédiat que si $v > d$ et $sV + (1-s)D > d$, les prêteurs n'ont aucune incitation à jouer une stratégie mixte puisqu'ils disposent d'une stratégie strictement dominante: jouer L. Le comportement des emprunteurs de type FS va alors dépendre de la différence entre le gain additionnel que leur rapporte la continuation lorsqu'ils déclarent correctement leur capacité à rembourser en date 2 par rapport à leur gain additionnel lorsqu'ils déclarent frauduleusement un défaut de paiement. Quand $y_2 > \frac{s(D-V)-(1-s)F}{s}$, la déclaration correcte de leur type est une stratégie dominante pour les emprunteurs FS. La croyance rationnelle du prêteur est alors telle qu'un emprunteur qui demande à renégocier ne peut-être qu'un emprunteur de type FNS. Le couple de stratégies (L, R) associé à la croyance $\mu = 0$ est alors l'unique EBP du jeu.

ii) Si $y_2 < \frac{s(D-V)-(1-s)F}{s}$ alors la continuation avec déclaration correcte de leur type est une stratégie dominée strictement pour les emprunteurs FS; ils choisiront alors en date 2 NR. La seule croyance qui peut être formée à l'équilibre par la banque est $\mu = 1$. La banque préfère alors jouer la liquidation indépendamment du type de l'emprunteur. Le couple de stratégies (L, NR) associé à la croyance $\mu = 1$ est alors l'unique EBP du jeu.

8.5 Démonstration du lemme 7

Nous démontrons dans un premier temps le que si: $sV + (1-s)D > d > v$, $y_2 > \frac{s(D-V)-(1-s)F+d-D}{s}$ et $\theta > \frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-d+t(d-v)}$, alors l'unique équilibre est caractérisé par le triplet $(\sigma_B^*; \sigma_L^*; \mu^*)$ avec:

$$\begin{aligned} p^* &= 1 - \frac{t(1-\theta)(d-v)}{\theta(sV+(1-s)D-d)}; \quad q^* = \frac{D-d}{s(y_2-D+V)+(1-s)F+D-d}; \\ \mu^* &= \frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-tv-(1-t)d} \end{aligned}$$

Si $sV + (1-s)D > d > v$, on a vu que la meilleure décision des prêteurs dépend du type de l'emprunteur: la banque préfèrera L si elle anticipe que l'emprunteur est du type FS, mais elle préfèrera NL si elle anticipe que l'emprunteur est de type FNS. Compte tenu de la croyance sur le type inobservable de l'emprunteur, on a les préférences suivantes pour les prêteurs:

$$\begin{aligned} L &\succ NL \Leftrightarrow \mu > \frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-tv-(1-t)d} \\ NL &\succ L \Leftrightarrow \mu < \frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-tv-(1-t)d} \end{aligned}$$

où $\frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-tv-(1-t)d}$ est la croyance pour laquelle les prêteurs sont indifférents entre liquider et renégocier, soit: $\mu(sV+(1-s)D)+(1-\mu)(tv+(1-t)d) = d$. On a alors trois cas possibles déterminés par les valeurs possibles à l'équilibre de μ:

<u>*CAS 1*</u>: considérons une situation où $\mu^* > \frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-tv-(1-t)d}$.

Si $y_2 > \frac{s(D-V)-(1-s)F}{s}$, la meilleure réponse des FS à L est de jouer R avec une probabilité $p = 1$: mais alors ceci contredit la croyance des emprunteurs $\mu > 0$.

Evidemment, si $y_2 < D - V$ on retrouve comme unique équilibre du jeu, l'équilibre pooling en stratégies pures donné par $(\sigma_L = L; \sigma_B = NR)$, associé à la croyance $\mu = 1$.

<u>*CAS 2:*</u> considérons une situation où $\mu^* < \frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-tv-(1-t)d}$

Les prêteurs préférant ne pas liquider, il est facile de vérifier qu'il n'existe aucun équilibre dans ce cas supporté par cette condition sur la croyance du prêteur: quel que soit le signe de $s(y_2 - D + V) + F(1-s)$, alors la meilleure réponse des emprunteurs FS est la stratégie pure NR (qui donne le paiement maximum: $y_1 + y_2 - d$,) ce qui contredit l'hypothèse $\mu < 1$.

<u>*CAS 3*</u>: considérons une situation où $\mu^* = \frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-tv-(1-t)d}$

La stratégie mixte d'équilibre du prêteur doit rendre un emprunteur de type FS indifférent entre rembourser et ne pas rembourser:

$$y_1 + y_2 - D = q(s(y_1 - V) + (1-s)(y_1 + y_2 - D - F)) + (1-q)(y_1 + y_2 - d)$$

de telle sorte que la probabilité d'équilibre du prêteur est donnée par:

$$q^* = \frac{D-d}{s(y_2-D+V)+(1-s)F+D-d}$$

La condition $q^* \in]0,1[$ exige que $y_2 > \frac{s(D-V)-(1-s)F+d-D}{s}$.

En appliquant la règle de Bayes, on a:

$$\mu^* = \frac{(1-p)\theta}{(1-p)\theta + (1-\theta)}$$

On a aussi $\mu^* = \frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-tv-(1-t)d}$, et on obtient en résolvant par rapport à la probabilité d'équilibre des emprunteurs:

$$p^* = \frac{\theta - \mu^*}{(1-\mu^*)\theta} = 1 - \frac{t(1-\theta)(d-v)}{\theta(sV+(1-s)D-d)}$$

Sous l'hypothèse $sV + (1-s)D > d > v$, la condition $p^* \in]0,1[$ est vérifiée si $\theta > \frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-d+t(d-v)}$.

Désormais, en supposant que les prêteurs se livrent une concurrence à la Bertrand sur le marché des dettes, alors à l'équilibre les banques atteignent un profit espéré qui est nul, soit:

$$\theta pD+\theta(1-p)q(sV+(1-s)D)+\theta(1-p)(1-q)d+(1-\theta)q(tv+(1-t)d)+(1-\theta)(1-q)d = c$$

La valeur de d qui satisfait la contrainte de profit espéré nul des banques est

$$d = \frac{c - \theta pD - qtv(1-\theta) - q(1-p)\theta(D(1-s)+sV)}{(1-q)(1-\theta p) + (1-t)q(1-\theta)}$$

La valeur de d est positive si et seulement si

$$c > \theta pD + qtv(1-\theta) + q(1-p)\theta(sV+(1-s)D)$$

c'est-à-dire si la somme du coût de la ressource sur le marché des dépôts (c) et de l'espérance de bénéfice de la banque liée à la renégociation de la dette $(\theta(1-p)(1-q)d + (1-\theta)(1-q)d + (1-\theta)q(1-t)d)$ est supérieure à l'espérance de bénéfice de la banque qui participe à ce jeu $(\theta(pD + (1-p)(q(sV + (1-s)D) + (1-q)d)) + (1-\theta)(q(tv + (1-t)d) + (1-q)d))$. Après résolution du système de 4 équations à 4 inconnues suivant

$$\begin{aligned}
d &= \frac{c - \theta pD - qtv(1-\theta) - q(1-p)\theta(D(1-s)+sV)}{(1-q)(1-\theta p) + (1-t)q(1-\theta)} \\
p &= 1 - \frac{t(1-\theta)(d-v)}{\theta(sV+(1-s)D-d)} \\
q &= \frac{D-d}{s(y_2 - D + V) + (1-s)F + D - d} \\
\mu &= \frac{t(d-v)}{sV+(1-s)D-tv-(1-t)d}
\end{aligned}$$

nous trouvons trois solutions possibles à (p, d, q) qui sont impossibles à interpréter. Nous dissocions donc le cas où le tribunal commet des erreurs de type 1 du cas où il commet des erreurs de type 2.

Pour simplifier l'interprétation des résultats, nous posons une nouvelle hypothèse $t = 1$, c'est-à-dire l'existence d'erreurs de type 2 uniquement ($t = 1$ et $s > 0$). Nous obtenons le triplet suivant, après réarrangement :

$$\begin{aligned}
p &= \frac{c - \theta D - (1-\theta)v + s\theta(D - V)}{s\theta(D - V)} \\
d &= \frac{(sV + (1-s)D)(c - \theta D) - (1-\theta)Dv}{c - \theta D - (1-\theta)(v + s(D - V))} \\
q &= \frac{D - \frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}}{s(y_2 - D + V) + (1-s)F + D - \frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}} \\
\mu &= \frac{(D - \frac{(c-D)s(D-V)}{c-Ds+(v-sV)(-1+\theta)+D(-1+s)\theta} - v)}{sV + (1-s)D - v}
\end{aligned}$$

Il s'agit désormais de vérifier les conditions d'existence de l'équilibre bayésien parfait en stratégies mixtes au vu des valeurs prises par les paramètres endogènes. En d'autres termes, démontrer que

Si $D > V$, $y_2 > (D - V) - \frac{(1-s)F}{s}$ et $c \in [\theta D + (1-\theta)v - \theta s(D - V), \theta D + (1-\theta)v]$ alors l'unique équilibre est caractérisé par le triplet $(\sigma_B^*; \sigma_L^*; \mu^*)$ avec:

$$\begin{aligned}
p^* &= \frac{c - \theta D - (1-\theta)v + s\theta(D - V)}{s\theta(D - V)} \\
d^* &= \frac{(sV + (1-s)D)(c - \theta D) - (1-\theta)Dv}{c - \theta D - (1-\theta)(v + s(D - V))} \\
q^* &= \frac{D - \frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}}{s(y_2 - D + V) + (1-s)F + D - \frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}} \\
\mu^* &= \frac{c - \theta D - (1-\theta)v}{c - \theta D - (1-\theta)(v + s(D - V))}
\end{aligned}$$

L'analyse de la valeur de p nous conduit aux résultats suivants :

	$D - V < 0$	$D - V > 0$
$c > \theta D + (1-\theta)v - \theta s(D - V)$	$p < 0$	$p > 0$
$c < \theta D + (1-\theta)v - \theta s(D - V)$	$p > 0$	$p < 0$

	$D - V < 0$	$D - V > 0$
$c < \theta D + (1-\theta)v$	$p > 1$	$p < 1$
$c > \theta D + (1-\theta)v$	$p < 1$	$p > 1$

Par conséquent, il apparaît deux cas possibles au vu de l'analyse de p^* :

$p^*\in [0,1]$ si $D-V>0$ et $c\in[\theta D+(1-\theta)v-\theta s(D-V),\theta D+(1-\theta)v]$.

$p^*\in [0,1]$ si $D-V<0$ et $c\in[\theta D+(1-\theta)v,\theta D+(1-\theta)v-\theta s(D-V)]$.

Seul le premier cas nous intéresse ici. Dans la mesure où $d^*=\frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}$, le montant de dette renégocié prend les valeurs $d^*=v$ si $c=\theta D+(1-\theta)v>0$ et $d^*=(1-\theta)v+\theta(sV+(1-s)D>0$ si $c=\theta D+(1-\theta)v-\theta s(D-V)$. Puisque $\frac{\partial d}{\partial c}=\frac{-1}{(.)^2}(s(D-V)(-1+\theta)(v-sV-(1-s)D)$ nous obtenons $\frac{\partial d}{\partial c}<0$ si $D-V>0$. Ainsi $d^*>0$ quelle que soit la valeur de $D-V$.

Maintenant, étudions $q^*=\frac{D-d}{s(y_2-D+V)+(1-s)F+D-d}$. Il convient tout d'abord de s'assurer que la condition $D-d>0$ est satisfaite. Puisque $D-d=\frac{(c-D)s(D-V)}{c-Ds+(v-sV)(-1+\theta)+\theta D(-1+s)}$, si $D-V>0$ alors $D-d>0$ si $c-Ds+(v-sV)(-1+\theta)+\theta D(-1+s)<0$. Or, par hypothèse sur p^*, $c\in[\theta D+(1-\theta)v-\theta s(D-V),\theta D+(1-\theta)v]$. Dans la mesure où $[\theta D+(1-\theta)v]-[Ds-(v-sV)(-1+\theta)-\theta D(-1+s)]=-s(1-\theta)(D-V)<0$, la condition $c-Ds+(v-sV)(-1+\theta)+\theta D(-1+s)<0$ est satisfaite sous l'hypothèse $c\in[\theta D+(1-\theta)v-\theta s(D-V),\theta D+(1-\theta)v]$.

Enfin, si $D-V>0$, $q^*>0$ ssi $y_2>(D-V)-\frac{(1-s)F}{s}-\frac{(c-D)(D-V)}{c-Ds+(v-sV)(-1+\theta)+\theta D(-1+s)}$. Nous avons déjà montré que sous les hypothèses qui assurent que $p^*\in[0,1]$, $d>0$ et $d<D$ on a pour le cas $D-V>0$: $\frac{(1-s)F}{s}>0$, $\frac{(c-D)(D-V)}{c-Ds+(v-sV)(-1+\theta)+\theta D(-1+s)}>0$. On aura enfin $q^*<1$ ssi $y_2>(D-V)-\frac{(1-s)F}{s}$. Dans la mesure où $(D-V)-\frac{(1-s)F}{s}>(D-V)-\frac{(1-s)F}{s}-\frac{(c-D)(D-V)}{c-Ds+(v-sV)(-1+\theta)+\theta D(-1+s)}$, la condition qui assure que $q^*\in[0,1]$ est $y_2>(D-V)-\frac{(1-s)F}{s}$.

Etudions désormais $\mu^*=\frac{c-\theta D-(1-\theta)v}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}$. Si $y_2>(D-V)-\frac{(1-s)F}{s}$, $D-V>0$ et $c\in[\theta D+(1-\theta)v-\theta s(D-V),\theta D+(1-\theta)v]$, le numérateur de μ^* est négatif. μ^* est alors positif ssi $c<\theta D+(1-\theta)(v+s(D-V))$. Cette inégalité est vérifiée dans la mesure où, sous l'hypothèse $D-V>0$, on a $\theta D+(1-\theta)v<\theta D+(1-\theta)(v+s(D-V))$. Enfin, $\mu^*<1$ ssi $c-\theta D-(1-\theta)v>c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))$. Cette inégalité est vérifiée si $D-V>0$ qui est vraie par hypothèse dans ce premier cas.

8.6 Statique comparative sur les erreurs de type 2

$$\frac{\partial d}{\partial s}=-\frac{(c-D)(D-V)(c-\theta D-(1-\theta)v)}{(c-sD+(v-sV)(-1+\theta)+D(-1+s)\theta)^2}$$

$$\frac{\partial(1-p)}{\partial s}=\frac{c-\theta D-(1-\theta)v}{s^2\theta(D-V)}$$

$$sign(\frac{\partial\mu}{\partial s})=sign((D-V)(1-\theta)(c-\theta D-(1-\theta v))$$

$$sign(\frac{\partial q}{\partial s})=sign((c\text{–}D)(D\text{–}V)\left[F\left(c-\theta D-(1-\theta)v\right)+s^2(1-\theta)(V-D)(F+D-V-y_2)\right])$$

8.7 Démonstration du lemme 8

Si $s = 0$ et $t \in [0, 1]$, nous obtenons au vu des résultats précédents la solution candidate suivante :

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{c(\theta + (1-\theta)t) - \theta D - tv(1-\theta)}{\theta(c - tv(1-\theta) - D(1-(1-\theta)t))} \\
d &= \frac{c - \theta D - (1-\theta)tv}{(1-t)(1-\theta)} \\
q &= \frac{c - D - (1-\theta)t(v-D)}{c - D - (1-\theta)\left[t\,(v-D) + (1-t)F\right]} \\
\mu &= \frac{t(c - \theta D - (1-\theta)v)}{(1-t)(D-c)}
\end{aligned}
$$

Il s'agit ici de démontrer que si $D - v > 0$ et $c \in [\theta D + (1-\theta)v, \frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t}]$ alors l'unique équilibre est caractérisé par le triplet $(\sigma_B^*; \sigma_L^*; \mu^*)$ avec:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{c(\theta + (1-\theta)t) - \theta D - tv(1-\theta)}{\theta(c - tv(1-\theta) - D(1-(1-\theta)t))} \\
d &= \frac{c - \theta D - (1-\theta)tv}{(1-t)(1-\theta)} \\
q &= \frac{c - D - (1-\theta)t(v-D)}{c - D - (1-\theta)\left[t\,(v-D) + (1-t)F\right]} \\
\mu &= \frac{t(c - \theta D - (1-\theta)v)}{(1-t)(D-c)}
\end{aligned}
$$

L'analyse de la valeur de p nous conduit à
$d > 0$ ssi $c > \theta D + (1-\theta)tv$
$p > 0$ ssi $\begin{cases} c > \frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t} \text{ et } c > tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t) \\ c < \frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t} \text{ et } c < tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t) \end{cases}$

La comparaison des termes $\frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t}$ et $tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t)$ nous conduit à considérer deux cas. En effet, $\frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t} - (tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t)) = \frac{(1-t)t(D-v)(1-\theta)^2}{-\theta - (1-\theta)t}$. Par conséquent le signe du terme $(D - v)$ détermine le signe de la différence précédente.

Premier cas : $D - v > 0$. Sous cette condition, $p^* > 0$ ssi $c \in [0, \frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t}] \cup [tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t), +\infty[$.

Second cas : $D - v < 0$. Sous cette condition, $p^* > 0$ ssi $c \in [0, tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t)] \cup [\frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t}, +\infty[$.

Exposé de manière différente,

Premier cas : le numérateur et le dénominateur de p^* sont positifs. Sous cette condition, $p^* > 0$ si $D - v > 0$ et $c > tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t)$ ou bien si $D - v < 0$ et $c > \frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t}$.

Second cas : le numérateur et le dénominateur de p^* sont négatifs. Sous cette condition, $p^*> 0$ si $D - v > 0$ et $c < \frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t}$ ou bien si $D - v < 0$ et $c < tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t)$.

Désormais, étudions les conditions sous lesquelles $p^*< 1$.

Premier cas : le numérateur et le dénominateur de p^* sont positifs. Sous cette condition, on a $p^*< 1$ ssi $t(1-\theta)(c - \theta D - (1-\theta)v) < 0$. Si on prend en compte la condition sous laquelle $d > 0$ (c'est-à-dire $c > \theta D + (1-\theta)tv$), $p^*< 1$ et $d^*> 0$ si $c \in [\theta D + (1-\theta)tv, \theta D + (1-\theta)v]$ si le numérateur et le dénominateur de p^* sont positifs.

Second cas : le numérateur et le dénominateur de p^* sont négatifs. Sous cette condition, on a $p^*< 1$ et $d^*> 0$ ssi $c > \theta D + (1-\theta)v$ car $p^*< 1$ ssi $c > \theta D + (1-\theta)v$ et $d^*> 0$ ssi $c > \theta D + (1-\theta)tv$.

Etudions enfin les conditions sous lesquelles $0 < q^*< 1$. $q^*> 0$ ssi $c > D + (1-\theta)\left[t\left(v - D\right) + (1-t)F\right]$ (i.e numérateur et dénominateur positifs) ou $c < D + (1-\theta)t\left(v - D\right)$ (numérateur et dénominateur négatifs). Dans le premier cas, la condition $q^*< 1$ est vérifiée ssi $0 < -(1-\theta)(1-t)F$. On ne peut donc pas avoir simultanément $q^* < 1$ et les numérateur et dénominateur de q positifs. En revanche, dans le second cas, la condition $q^*< 1$ est satisfaite puisqu'il suffit que $0 > -(1-\theta)(1-t)F$.

En résumé,

$0 < p* < 1$ et $d* > 0$ ssi :

- premier cas : le dénominateur et le numérateur de p^* sont positifs c'est-à-dire si (il y a deux cas selon le signe de $D - V$):

si $D - v > 0$ et $c > tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t)$ et $c \in [\theta D + (1-\theta)tv, \theta D + (1-\theta)v]$. Or ce cas est impossible dans la mesure où $tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t) > \theta D + (1-\theta)v$.

si $D - v < 0$ et $c > \frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t}$ et $c \in [\theta D + (1-\theta)tv, \theta D + (1-\theta)v]$. C'est-à-dire si $c \in [\frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t}, \theta D + (1-\theta)v]$ car $\theta D + (1-\theta)v > \frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t} > \theta D + (1-\theta)tv$

- second cas : le dénominateur et le numérateur de p^* sont négatifs c'est-à-dire si (il y a deux cas selon le signe de $D - V$):

si $D - V > 0$ et $c < \frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t}$ et c$>\theta D + (1-\theta)v$. Dans la mesure où $\frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t} > \theta D + (1-\theta)v$ si $D - V > 0$, la condition précédente s'écrit c$\in [\theta D + (1-\theta)v, \frac{\theta D + tv(1-\theta)}{\theta + (1-\theta)t}]$.

si $D - V < 0$ et $c < tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t)$ et $c > \theta D + (1-\theta)v$. Dans la mesure où si $D - v > 0$ on a $tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t) < \theta D + (1-\theta)v$ alors les conditions $c < tv(1-\theta) + D(1-(1-\theta)t)$ et $c > \theta D + (1-\theta)v$ ne peuvent pas être satisfaites simultanément.

Si on combine les conditions précédentes avec les conditions assurant que $0 < q < 1$, on obtient deux cas :

cas 1 : $D-v<0$. Supposons que $c<D+(1-\theta)t\,(v-D)$ (numérateur et dénominateur de q négatifs). Dans la mesure où $\theta D+(1-\theta)v-(D+(1-\theta)t\,(v-D))=(1-\theta)(1-t)(v-D)<0$ alors $d>0$, $0<p<1$, $0<q<1$ ssi $c\in[\frac{\theta D+tv(1-\theta)}{\theta+(1-\theta)t},\theta D+(1-\theta)v]$.

cas 2 : $D-v>0$. Supposons que $c<D+(1-\theta)t\,(v-D)$ (numérateur et dénominateur de q négatifs). Dans la mesure où $D+(1-\theta)t\,(v-D)-(\frac{\theta D+tv(1-\theta)}{\theta+(1-\theta)t})=(1-\theta)^2(1-t)t(D-v)>0$, $d>0$, $0<p<1$, $0<q<1$ ssi $c\in[\theta D+(1-\theta)v,\frac{\theta D+tv(1-\theta)}{\theta+(1-\theta)t}]$.

Enfin la condition $d<D$ est satisfaite ssi $c>D+(1-\theta)t(v-D)$

Intéressons nous désormais à μ*. μ*>0 ssi $c>\theta D+(1-\theta)v$. De plus μ*<1 ssi $c<D+t(1-\theta)(v-D)$. De la sorte on évacue un des deux cas précédents, précisément le cas 1 pour lequel $c\in[\frac{\theta D+tv(1-\theta)}{\theta+(1-\theta)t},\theta D+(1-\theta)v]$ sauf à considérer que μ*$=0$. Il reste donc un seul cas, à savoir $D-v>0$ et $c\in[\theta D+(1-\theta)v,\frac{\theta D+tv(1-\theta)}{\theta+(1-\theta)t}]$. La condition $c<D+t(1-\theta)(v-D)$ est satisfaite dans la mesure où $D+t(1-\theta)(v-D)-\left(\frac{\theta D+tv(1-\theta)}{\theta+(1-\theta)t}\right)=(1-\theta)^2t(D-v)(1-t)>0$.

8.8 Statique comparative dans le cas des erreurs de type 1

Il suffit de regarder le signe des dérivées ci-dessous.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d}{\partial t} &= \frac{(c-\theta D-(1-\theta)v)}{(1-\theta)(1-t)^2}\\
\frac{\partial \mu}{\partial t} &= -\frac{(c-\theta D-(1-\theta)v)}{(c-D)(1-t)^2}\\
\frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{(c-D)(1-\theta)(c-\theta D-(1-\theta)v)}{\theta(c-(1-\theta)tv-D(1-t+t\theta))^2}\\
\frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{-F(1-\theta)(c-\theta D-(1-\theta)v)}{(c-(1-\theta)(tv+(1-t)F)+D(-1+t-\theta t))^2}
\end{aligned}$$

8.9 Démonstration du lemme 9

En remplaçant, p et q par leurs valeurs dans l'expression $BE_{AR}-BE_{SR}=y_2\left((1-\theta)(1-q)-\theta(1-p)q\right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
BE_{AR}-BE_{SR} &= \frac{(c-D)^2+(y_2+V-v)(1-\theta)(c-D)+(v-V)(1-\theta)^2(D-V-y_2)}{y_2(c-D)+(1-\theta)(v-V)(D-y_2-V)}\\
&= (1-\theta)+\frac{(c-D)(c-D+(1-\theta)(V-v))}{(c-D)y_2+(1-\theta)(v-V)(D-y_2-V)}
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $c<\theta D+(1-\theta)v$. En outre, $\theta D+(1-\theta)v<D-(1-\theta)(V-v)$. Donc $c-D+(1-\theta)(V-v)<0$. Par hypothèse, on a également $c-D<0$. Par conséquent, $(c-D)(c-D+(1-\theta)(V-v))>0$.

Si $c-D+(1-\theta)(V-v)<0$ on a $(1-\theta)(V-v)<D-c$ donc $y_2(1-\theta)(V-v)<y_2(D-c)$. Puisque $D-V>0$ et $y_2-D+V>0$ alors $y_2-D+V<y_2$. On peut donc écrire $(1-\theta)(V-v)(y_2-(D-V))<(1-\theta)(V-v)y_2<y_2(D-c)$. Par conséquent, $(c-D)y_2+(1-\theta)(v-V)(D-y_2-V)<0$.

Enfin $BE_{AR}-BE_{SR}>0$ ssi $(1-\theta)>(D-c)\frac{(c-D+(1-\theta)(V-v))}{(c-D)y_2+(1-\theta)(v-V)(D-y_2-V)}$ ou $(1-\theta)(c-D)y_2+(1-\theta)^2(v-V)(D-y_2-V)<(D-c)(c-D+(1-\theta)(V-v))$ ou $(1-\theta)(c-D)y_2+(c-D)^2<(1-\theta)(V-v)(D-c-(1-\theta)(y_2-D+V))$. Donc $(D-c)((D-c)-(1-\theta)y_2)<(1-\theta)(V-v)(D-c-(1-\theta)(y_2-D+V))$.

Si $D-c>(1-\theta)y_2>(1-\theta)(y_2-D+V)$ alors $(D-c-(1-\theta)(y_2-D+V))>0$.

Sous la condition $c<D-(1-\theta)y_2$, on peut écrire : $BE_{AR}-BE_{SR}>0$ ssi

$$\frac{(D-c)\left[(D-c)-(1-\theta)\,y_2\right]}{(1-\theta)\left((D-c)-(1-\theta)\left(y_2-D+V\right)\right)}<V-v$$

8.10 Démonstration du lemme 10

Sous les hypothèses régissant l'existence de l'existence d'un EBP en stratégies mixtes dans le cas où $s=0$ et $t>0$ (précisément, $D-v>0$ et $c\in[\theta D+(1-\theta)v,\frac{\theta D+tv(1-\theta)}{\theta+(1-\theta)t}]$), nous avons :

$$BE_{AR}-BE_{SR}=-\frac{\begin{array}{c}(-F)(1-\theta)\left[-\theta y_1-y_2+t\left(v(-1+\theta)-\theta D+\theta y_1+y_2\right)\right]+\\ c\left[Ft\left(-1+\theta\right)+y_2\left(-1+t\right)-\theta(y_1+ty_2)\right]+\\ \left[D-Dt+tv+t(D-v)\theta\right]\left[y_2-ty_2+\theta(y_1+ty_2)\right]\end{array}}{c-\left(tv+(1-t)F\right)(1-\theta)-D(1-t(1-\theta))}$$

Au vu des hypothèses retenues, le dénominateur de l'expression précédente est strictement négatif. Après réarrangement, le numérateur peut s'écrire

$$-F(1-\theta)\left(t(c-\theta D-(1-\theta)v)-(1-t)(y_2+\theta y_1)\right)+(\theta y_1+y_2-(1-\theta)ty_2)(D-(1-\theta)t(D-v)-c)$$

Par conséquent, le signe de $BE_{AR}-BE_{SR}$ est le signe de l'expression précédente. Soit, $BE_{AR}-BE_{SR}>0$ ssi

$$F(1-\theta)\left(t(c-\theta D-(1-\theta)v)-(1-t)(y_2+\theta y_1)\right)<(\theta y_1+y_2-(1-\theta)ty_2)(D-(1-\theta)t(D-v)-c)$$

Il existe deux cas possibles selon le signe de l'expression $(t(c-\theta D-(1-\theta)v)-(1-t)(y_2+\theta y_1))$:

Cas 1 : si $(t(c-\theta D-(1-\theta)v)-(1-t)(y_2+\theta y_1))>0$, $BE_{AR}-BE_{SR}>0$ ssi

$$F<\frac{(\theta y_1+y_2-(1-\theta)ty_2)(D-(1-\theta)t(D-v)-c)}{(1-\theta)\left(t(c-\theta D-(1-\theta)v)-(1-t)(y_2+\theta y_1)\right)}$$

Cas 2 : si $(t(c-\theta D-(1-\theta)v)-(1-t)(y_2+\theta y_1))<0$, $BE_{AR}-BE_{SR}>0$ ssi

$$F>\frac{(\theta y_1+y_2-(1-\theta)ty_2)(D-(1-\theta)t(D-v)-c)}{(1-\theta)\left(t(c-\theta D-(1-\theta)v)-(1-t)(y_2+\theta y_1)\right)}$$

Nous remarquons que sous les hypothèses d'existence de l'EBP en stratégies mixtes on a

$$(D-(1-\theta)t(D-v)-c)>0$$

et

$$(\theta y_1 + y_2 - (1-\theta)ty_2) > 0$$

On peut donc réécrire les conditions sous lesquelles on a $BE_{AR} - BE_{SR} > 0$ de la manière suivante :

Cas 1 : si $y_2 < \frac{t}{1-t}\left(c - \theta D - (1-\theta)v\right) - \theta y_1$ on a $BE_{AR} - BE_{SR} > 0$ ssi

$$F < \frac{(\theta y_1 + y_2 - (1-\theta)ty_2)(D - (1-\theta)t(D-v) - c)}{(1-\theta)\left(t(c - \theta D - (1-\theta)v) - (1-t)(y_2 + \theta y_1)\right)}$$

Cas 2 : si $y_2 > \frac{t}{1-t}\left(c - \theta D - (1-\theta)v\right) - \theta y_1$, $BE_{AR} - BE_{SR} > 0$ quelle que soit la valeur de F dans la mesure où la condition suivante (

$$F > \frac{(\theta y_1 + y_2 - (1-\theta)ty_2)(D - (1-\theta)t(D-v) - c)}{(1-\theta)\left(t(c - \theta D - (1-\theta)v) - (1-t)(y_2 + \theta y_1)\right)}$$

) est toujours satisfaite dans la mesure où $F > 0$ et

$$\frac{(\theta y_1 + y_2 - (1-\theta)ty_2)(D - (1-\theta)t(D-v) - c)}{(1-\theta)\left(t(c - \theta D - (1-\theta)v) - (1-t)(y_2 + \theta y_1)\right)} < 0$$

8.11 Démonstration du lemme 11

Sous les hypothèses régissant l'existence de l'existence d'un EBP en stratégies mixtes dans le cas où $s > 0$ et $t = 1$ (précisément, $y_2 > (D - V) - \frac{(1-s)F}{s}$, $D - V > 0$ et $c \in [\theta D + (1-\theta)v - \theta s(D-V), \theta D + (1-\theta)v]$ ou si $D - V < 0$ et $c \in [\theta D + (1-\theta)v, \theta D + (1-\theta)v - \theta s(D-V)]$), nous avons :

$BE_{AR} - BE_{SR} =$

$$\frac{\left(c - v + \left(D(-1+s) + v - sV\right)\theta\right)(y_1 + y_2)}{s(D-V)} +$$

$$\frac{\begin{pmatrix} (c + v(-1+\theta) - \theta D) \\ (Dv + cs(D-V) + D(s(-D+V) + v(-1+\theta)) - Dv\theta) \\ (F(-1+s) + y_1 + y_2 - sy_2) \end{pmatrix}}{s(-D+V) \begin{pmatrix} (c - Ds + (v - sV)(-1+\theta) + D(-1+s)\theta) \\ (D + F - sF - \frac{(sV + (1-s)D)(c-\theta D) - (1-\theta)Dv}{c - \theta D - (1-\theta)(v + s(D-V))} + s(-D + V + y_2)) \end{pmatrix}} +$$

$$(1-\theta)y_2 \left(1 - \frac{Dv + cs(D-V) + D(s(-D+V) + v(-1+\theta)) - Dv\theta}{\begin{matrix} (c - Ds + (v - sV)(-1+\theta) + D(-1+s)\theta) \\ (D + F - sF - \frac{(sV + (1-s)D)(c-\theta D) - (1-\theta)Dv}{c - \theta D - (1-\theta)(v + s(D-V))} + s(-D + V + y_2)) \end{matrix}} \right) +$$

$$\frac{\begin{matrix} (c + v(-1+\theta) - D\theta)(y_1 + y_2) \\ \left(1 - \frac{Dv + cs(D-V) + D(s(-D+V) + v(-1+\theta)) - Dv\theta}{(c - Ds + (v - sV)(-1+\theta) + D(-1+s)\theta)(D + F - sF - \frac{(sV + (1-s)D)(c-\theta D) - (1-\theta)Dv}{c - \theta D - (1-\theta)(v + s(D-V))} + s(-D + V + y_2))}\right) \end{matrix}}{s(-D+V)}$$

Après réarrangement, on a

$$\frac{(c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V))\,(y_1+y_2)}{s(D-V)}+(1-\theta)y_2+\frac{(c-v(1-\theta)-D\theta)(y_1+y_2)}{s(-D+V)}+$$
$$\left(\frac{((D-V)s(c-D))}{(c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V)-s(D-V))\\ (D+(1-s)F+s(-D+V+y_2)-\frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))})}\right)$$
$$((c-v(1-\theta)-\theta D)(-(1-s)F)-sy_2(c-D+(1-\theta)(V-v)))$$

Dans le premier cas (c'est-à-dire si $y_2>(D-V)-\frac{(1-s)F}{s}$, $D-V>0$ et $c\in[\theta D+(1-\theta)v-\theta s(D-V),\theta D+(1-\theta)v])$ le terme

$$\frac{(c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V))\,(y_1+y_2)}{s(D-V)}+(1-\theta)y_2+\frac{(c-v(1-\theta)-D\theta)(y_1+y_2)}{s(-D+V)}$$

est positif selon nos hypothèses. Ensuite, le terme

$$((c-v(1-\theta)-\theta D)(-(1-s)F)-sy_2(c-D+(1-\theta)(V-v)))$$

est positif. Le terme $((D-V)s(c-D))$ est négatif. En revanche, on ne peut pas préciser le signe du terme

$$(c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V)-s(D-V))$$
$$\left(D+(1-s)F+s(-D+V+y_2)-\frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}\right)$$

Néanmoins, le terme $(c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V)-s(D-V))$ est strictement négatif. Par conséquent, si

$$\left(D+(1-s)F+s(-D+V+y_2)-\frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}\right)>0$$

alors $BE_{AR}-BE_{SR}>0$. Toutefois, si on regarde la valeur de y_2 qui annule le terme

$$\left(D+(1-s)F+s(-D+V+y_2)-\frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}\right)$$

, on trouve $y_2^*=D-V-\frac{(1-s)F}{s}-\left(\frac{(c-D)(D-V)}{c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V)-s(D-V)}\right)$. Plus précisément,

$$\left(D+(1-s)F+s(-D+V+y_2)-\frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}\right)>0$$

ssi

$$y_2>D-V-\frac{(1-s)F}{s}-\left(\frac{(c-D)(D-V)}{c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V)-s(D-V)}\right)$$

. Or, par hypothèse, $y_2 > (D-V) - \frac{(1-s)F}{s}$. Puisque $\left(\frac{(c-D)(D-V)}{c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V)-s(D-V)}\right) > 0$ alors

$$D-V-\frac{(1-s)F}{s}-\left(\frac{(c-D)(D-V)}{c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V)-s(D-V)}\right) < D-V-\frac{(1-s)F}{s}$$

. Donc, dans notre cadre d'hypothèses, $y_2 > D-V-\frac{(1-s)F}{s}-\left(\frac{(c-D)(D-V)}{c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V)-s(D-V)}\right)$.

En résumé, $(c-\theta D-(1-\theta)v+\theta s(D-V)-s(D-V))$ est strictement négatif et

$$\left(D+(1-s)F+s(-D+V+y_2)-\frac{(sV+(1-s)D)(c-\theta D)-(1-\theta)Dv}{c-\theta D-(1-\theta)(v+s(D-V))}\right) > 0$$

alors $BE_{AR} - BE_{SR} > 0$.