Médias en ligne : les risques d'une course à l'audience de masse

Danielle Attias et Frédéric Gannon

10 mai 2007

Résumé

Certains acteurs de la presse sur Internet, notamment les éditeurs d'informations générales épousent, par mimétisme, le modèle économique et la stratégie de valorisation de l'audience des grands portails en ligne. Dans un modèle théorique, nous montrons l'impact de la course à l'audience pour ce type de firmes. Dans un contexte de concurrence entre médias en ligne, si ceux-ci ne valorisent que la taille de leur audience auprès des annonceurs, le média dont l'audience est la plus faible risque d'être exclu du marché publicitaire.

Mots clés : *Journaux, Internet, modèle économique, publicité, audience*

1 Introduction

Dans cet article, nous souhaitons montrer que dans un contexte de concurrence entre deux sites de presse en ligne proposant des contenus homogènes, si les annonceurs considèrent ces sites comme de simples vecteurs de diffusion de publicités destinées à un public de masse, alors le site à l'audience la plus faible risque d'être marginalisé. Nous avons vu précédemment que la part de la publicité en ligne ne cessait d'augmenter parmi les investissements publicitaires des annonceurs. Selon l'*IAB France*, 9 % des investissements seraient désormais réalisés en ligne, hors liens sponsorisés. Toutefois, ceux-ci sont concentrés sur une partie très restreinte de sites : les portails, moteurs de recherche et les sites des fournisseurs d'accès à Internet en 2005 recueillaient 64 % des investissements publicitaires en France et 47 % en 2006. Si l'on intègre les liens sponsorisés, aux Etats-Unis en 2005, *Google* et *Yahoo* captent seuls 54 % du marché total de la publicité en ligne[1]. En France, on évoque des niveaux de concentration allant jusqu'à 70 % du marché, entre les mains de *Google*, *Yahoo* et *MSN*[2].

Nous analysons cette question en mettant en place un modèle de concurrence entre deux sites de presse, dans un contexte d'aversion à la publicité. Ici, le lecteur est rétif à la fois à un trop grand volume de publicité, mais aussi à des messages publicitaires qu'il considère comme inadaptés par rapport à ses attentes. Nous proposons donc d'analyser un marché de la publicité différencié horizontalement par rapport aux lecteurs de sites. Par ailleurs, le marché des médias est différencié verticalement, sur la qualité des contenus proposés aux lecteurs. Notre modèle analyse comment la différenciation horizontale entre annonceurs affecte la concurrence sur la publicité entre les firmes éditrices des sites de presse. Nous prenons en compte le cas dans lequel des lecteurs choisissent de lire un seul site de presse pour accéder à des contenus d'information (*single-homing*), alors que les annonceurs cherchent à placer des espaces publicitaires sur les deux sites (*multi-homing*).

Cette hypothèse de captivité des lecteurs sur les sites de presse est forte, mais nous pouvons la justifier techniquement et empiriquement. Tout d'abord, nous voulions nous concentrer dans le modèle sur la relation qui existe entre les annonceurs et les lecteurs. Le média n'est ici qu'un simple relais d'audience. Il s'agit donc de montrer comment se comportent les annonceurs lorsqu'ils cherchent à toucher en nombre un public particulier (par exemple : la cible des jeunes ou des catégories socio-professionnelles supérieures) et comment agissent les médias en réaction, notamment concernant leurs investissements en qualité. Si nous avions voulu au contraire étudier la différenciation horizontale entre médias et la mobilité des lecteurs entre les deux médias du fait de leur distance au profil de chacun d'entre eux, nous aurions été confrontés à une fonction d'utilité des lecteurs avec une double différenciation horizontale. Or, ce type de modèle pose des problèmes de résolution techniques : il n'existe pas forcément d'équilibre dans un tel cas à deux dimensions [Irmen et Thisse, 1998]. Nous avons donc opté pour l'immo-

[1]Source : rapport Morgan Stanley sur l'e-pub, 2005

[2]Source : "*Yahoo ou MSN ont pris la place des groupes de presse*", interview de David Targy, auteur d'une étude sur les stratégies de développement des médias sur l'Internet dans *Libération*, 25 août 2006

bilité des lecteurs sur chacun des sites de presse, ce qui diffère des modèles jusque là élaborés sur les médias de type Hotelling. Par ailleurs, cette hypothèse de *single-homing*, qui peut paraître très forte s'agissant particulièrement d'Internet, n'est en fait pas très éloignée de la réalité empirique pour une majorité de lecteurs de sites d'information : dans le panel de lecteurs du *Washington Post* analysé par Gentzkow [2006], parmi ceux qui "*lisent au moins un journal papier ou en ligne dans les dernières 24 heures, un tiers en lit deux ou plus*". Une majorité de lecteurs est donc fidèle à un journal en ligne pendant une journée de consultation d'actualités. Cette constatation empirique peut s'expliquer par l'attention et le temps limités dont disposent les internautes au cours d'une journée de consultation : du fait de l'existence de coûts au changement et l'investissement que représente le repérage d'autres sources d'information en ligne, la majorité des internautes se dirigeraient vers les sites avec lesquels ils sont en affinité et auxquels ils sont habitués.

Notre modèle est aussi lié aux modèles de Dukes et Gal-Or [2003] et Anderson et Coate [2003], qui analysent les choix de consommateurs sur le marché final des produits pour déterminer la demande des producteurs pour la publicité. Le modèle de Dukes et Gal-Or [2003] examine un modèle de concurrence entre deux médias commerciaux différenciés horizontalement. L'originalité de ce modèle est qu'il relie la variété des médias et la concurrence sur le marché des produits. Les producteurs sont aussi différenciés et utilisent la publicité pour informer les consommateurs sur leurs produits, même si l'audience des médias la considère comme une nuisance. Ils montrent que les médias ont une incitation à minimiser l'étendue de la différenciation entre eux, de manière à ce que les producteurs puissent diminuer leurs volumes de publicité et extraire des marges plus élevées sur les ventes de produits. Les médias peuvent donc fixer des tarifs plus élevés pour les espaces publicitaires. Dans leur modèle, la publicité est toujours considérée comme une nuisance, proportionnellement au volume de publicités regardées sur l'une ou l'autre des chaînes de télévision. Elle ne peut donc pas générer de bénéfices informationnels, grâce à la proximité entre un type de téléspectateurs et le positionnement de la marque. Du côté des annonceurs, le surplus est associé à des ventes directes de produits. Toutefois, les producteurs utilisent également la publicité afin de créer une affinité des consommateurs de médias avec leur marque, qui peut dépasser la cible des acheteurs de ses produits. Nous nous référons également au modèle de Anderson et Coate [2003] qui comparent l'offre télévisuelle optimale et celle fournie par le marché. Ils montrent qu'un monopole produirait un surplus social supérieur à celui des firmes en concurrence. Ils relient aussi les choix de programmes des chaînes de télévision à l'appétence des consommateurs à payer pour les biens, dont la promotion publicitaire est diffusée sur ces chaînes.

Peu de modèles analysent la concurrence entre médias en utilisant la notion de différenciation en qualité entre les firmes. La plupart s'attache davantage à la différenciation politique ou à la différenciation dans la composition des contenus (ex. : informations vs divertissement). Le modèle de Benzoni et Bourreau [2001] tente de réconcilier les deux approches en combinant différenciations verticale et horizontale dans l'industrie des médias. Il semble pourtant que la différenciation en qualité soit un critère pertinent d'analyse des stratégies des sites de presse en ligne. Sur un marché cohérent de contenus d'informations (informations politiques, économiques, etc.), la différence entre sites consiste davantage dans la complétude de l'offre. Nous pouvons prendre par exemple les sites des deux principaux quotidiens français qui éditent et distribuent des informations générales et politiques, *Liberation.fr* et *LeMonde.fr*. Jusqu'à une période récente, *Liberation.fr* n'était destiné qu'à la publication sur Internet des articles du journal papier, de quelques articles et services interactifs exclusifs en ligne. Le site employait seulement 8 personnes. A contrario, *LeMonde.fr* a investi massivement pour développer une filiale spécifique aux activités Internet, employant aujourd'hui 55 salariés. Ils produisent des articles spécifiques pour le site Internet du journal, des newsletters, des animations, des podcasts et toute une gamme de services interactifs dédiés (blogs, chats, forums modérés, zones exclusives abonnés Internet). Les deux quotidiens sont plutôt des journaux dits “de gauche”, mais le principal critère de différenciation de leurs sites Internet est la qualité de leurs contenus en ligne.

Nous nous référons également au modèle de Gabszewicz et Wauthy [2005]. Les auteurs y analysent les stratégies de tarification optimales dans un marché à deux faces — ici en particulier, le marché des salons — lorsque les deux parties peuvent changer de plate-forme (multi-homing). La qualité du produit d'un côté du marché est donnée par la taille du réseau de l'autre côté du marché (externalités croisées positives). Ils montrent que l'hypothèse de multi-homing relâche la concurrence entre les plates-formes. Le seul équilibre apparaît lorsque les agents ne changent de plate-forme que sur un côté du marché.

Nous proposons un jeu en trois étapes : tout d'abord, les firmes choisissent leur investissement en qualité pour se différencier verticalement et les annonceurs choisissent leur profil. Puis, les deux sites de presse et les deux annonceurs fixent leurs volumes de publicité et le prix des espaces publicitaires sur chacun des sites. Enfin, les lecteurs choisissent de regarder la publicité de l'annonceur 1 ou 2. L'originalité de ce modèle est de se concentrer sur une nouvelle manière d'envisager la rétribution de l'annonceur : sa satisfaction d'avoir atteint une cible de consommateurs potentiels[3].

2 Le modèle

Nous faisons l'hypothèse d'un marché publicitaire différencié horizontalement, avec deux annonceurs j et d'un marché de médias différencié verticalement, avec deux sites de presse i. Trois types d'agents sont impliqués dans le modèle.

Les lecteurs. Les lecteurs consomment des contenus d'information et de la publicité sur l'un des sites de presse. La masse des lecteurs est N. Les lecteurs peuvent visiter le site de presse 1 ou 2 pour lire des contenus d'information. Nous faisons l'hypothèse que, dans la période considérée, ils ne peuvent pas consommer des contenus sur les deux sites et qu'ils sont captifs

[3]Sur Internet, certaines campagnes publicitaires peuvent être suivies par des indicateurs qui vont jusqu'à la vente en ligne du produit. Or, dans la plupart des cas, l'annonceur ne dispose pas forcément d'une boutique en ligne lui permettant de suivre le consommateur du clic sur une bannière à l'achat. Dès lors, comme dans la plupart des médias traditionnels, le succès d'une campagne s'évalue au taux de "reach" des cibles socio-démographiques que l'annonceur souhaite toucher via certains médias. L'avantage avec Internet est de pouvoir proposer une indication supplémentaire de l'intérêt du consommateur pour le message publicitaire de l'annonceur, grâce au taux de clic sur la bannière placée sur un site. Le taux de clic moyen en France fin 2004 était autour de 0,62 % pour une bannière classique et de 1,17 % pour un espace publicitaire en "rich média" (source : DoubleClick)

de l'un des deux sites de presse pour accéder aux informations. Le marché est entièrement couvert, mais les lecteurs ne peuvent mixer les contenus provenant des deux sites de presse. Dans ce modèle, nous considérons une situation de concurrence au moment où un lecteur se connecte pour rechercher de l'information et doit choisir entre deux sites. Il reste alors sur le site de presse qu'il a choisi à court terme. La part de marché de chaque site de presse est N_i, avec $N = N_1 + N_2$. N_1 et N_2 sont distribués uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$.

Les lecteurs sont désignés par le type γ_i, distribués uniformément sur l'intervalle $[0, \bar{\gamma}]$. γ_i représente le goût du lecteur pour la qualité du site de presse i. C'est une fonction de K_i, qui représente les investissements en qualité du site de presse i. Si v désigne les attentes des lecteurs sur la qualité du site de presse, ils reçoivent une utilité $\gamma_i v$. Un site de presse propose aussi de la publicité. Nous faisons l'hypothèse que la publicité et les contenus sont additivement séparables dans la fonction d'utilité du lecteur.

Conformément à la littérature et aux faits stylisés cités auparavant, les lecteurs sont supposés considérer à la fois d'importants volumes de publicité et des messages publicitaires inadaptés comme des nuisances. Une première perte d'utilité est $a_i^j\delta$, où $\delta > 0$ est le paramètre de désutilité du lecteur pour des volumes importants de publicité et a_i^j est le volume de publicité sur le site i proposé par l'annonceur j. Nous supposons aussi que si un message publicitaire s'approche de l'intérêt des lecteurs, la nuisance causée par les interférences publicitaires diminue. Le lecteur de type ψ a un goût particulier pour des publicités adaptées. Un paramètre de préférence du lecteur $\psi \in [0, 1]$ reflète son type favori de publicité. Si une publicité proposée par l'annonceur j est localisée en ψ^j, le lecteur subit une seconde perte d'utilité $t(\psi - \psi^j)^2$, où $t > 0$ est le paramètre de désutilité du lecteur s'il reçoit des messages publicitaires inadaptés. Tous les consommateurs sont supposés avoir les mêmes paramètres δ et t. Nous supposons aussi que $\psi^1 < \psi^2$. En visitant les sites de presse 1 ou 2, les lecteurs peuvent être exposés à des messages publicitaires des deux annonceurs j. Pour résumer, la fonction d'utilité des lecteurs est :

$$U = \gamma_i v - \delta a_i^j - t[(\psi - \psi^1)^2 + (\psi - \psi^2)^2]$$

La fonction de rétribution ci-dessus restitue l'utilité dérivée de la qualité des contenus et les désutilités combinées dues aux deux types de coûts de nuisance imposés par la publicité : le volume et la proximité avec les préférences des consommateurs. Nous supposons ici que les consommateurs ont une connaissance de l'intensité et du type de publicité disponibles sur les sites de presse avant de choisir leur destination : chaque média aurait construit une certaine réputation sur la quantité et le type de publicité disponible en ligne.

En considérant les lecteurs d'un site de presse i, nous examinons la localisation $\widetilde{\psi}$ du consommateur indifférent entre l'annonceur 1 et l'annonceur 2. Le consommateur indifférent peut être aussi réceptif au message publicitaire de l'annonceur 1 ou 2, lorsque les biens dont il est fait promotion sont homogènes. Le consommateur indifférent est alors défini par l'égalité des deux désutilités causées par les messages publicitaires des annonceurs 1 et 2 :

$$\delta(a_1^1 + a_2^1) + t(\widetilde{\psi} - \psi^1)^2 = \delta(a_1^2 + a_2^2) + t(\widetilde{\psi} - \psi^2)^2$$

Nous obtenons la résolution en $\widetilde{\psi}$:

$$\widetilde{\psi} = \frac{\psi^1+\psi^2}{2} + \frac{\delta[(a_1^2+a_2^2)-(a_1^1+a_2^1)]}{2t(\psi^2-\psi^1)}$$

Qui peut aussi être écrit comme suit :

$$X^1 = \widetilde{\psi} = \frac{\psi^1+\psi^2}{2} + \frac{\delta(a_.^2-a_.^1)}{2t(\psi^2-\psi^1)}, \text{ et } X^2 = 1 - \widetilde{\psi}$$

Sur la gauche de $\widetilde{\psi}$, les lecteurs du site de presse i sont seulement réceptifs aux messages de l'annonceur 1. Ainsi, le nombre total de lecteurs en ligne réceptifs au message publicitaire de l'annonceur 1, i.e. la part de marché de l'annonceur 1 est $n_1 = X^1N$ et celle de l'annonceur 2 est $n_2 = X^2N$. Ces parts de marché représentent les cibles que chacun des annonceurs a réussi à atteindre parmi les lecteurs des deux sites de presse.

Remarque 1 : Pour qu'il existe une solution, il faut que $\widetilde{\psi}$ soit compris entre ψ_1 et ψ_2, soit $\psi_1 \leq \widetilde{\psi} \leq \psi_2$. Nous devons donc avoir :

$\psi_1 \leq \frac{\psi_1+\psi_2}{2} + \frac{\delta\left[\left(a_1^2+a_2^2\right)-\left(a_1^1+a_2^1\right)\right]}{2t(\psi_2-\psi_1)} \leq \psi_2$, ou encore : $\psi_1 - \psi_2 \leq \frac{\delta\left(a_\cdot^2-a_\cdot^1\right)}{t(\psi_2-\psi_1)} \leq \psi_2 - \psi_1$

C'est-à-dire : $\left|a_\cdot^2 - a_\cdot^1\right| \leq \frac{t}{\delta}\left(\psi_2 - \psi_1\right)^2$

Cette condition nous permet de souligner qu'il existerait entre annonceurs une certaine modération dans l'écart de leurs investissements publicitaires, en volume. La solution du jeu laisse donc présager que les volumes publicitaires $a_\cdot^1$ et $a_\cdot^2$ sont proches à l'équilibre.

Les annonceurs. Ils sont notés j, $j = 1, 2$, et proposent de la publicité sur les sites de presse i, $i = 1, 2$. Nous désignons par $G(a_i^j)$ la probabilité qu'un lecteur donné d'un site de presse i clique sur un espace publicitaire d'un annonceur j, où $G(\cdot) \in [0, 1]$, $G(0) = 0$, $G'(\cdot) > 0$ et $G''(\cdot) < 0$. Cette probabilité dépend du volume de publicité choisie par j. Elle accroît à un taux décroissant suivant l'intensité de la publicité. La rétribution de l'annonceur j consiste en la satisfaction d'atteindre les bonnes cibles — i.e. les lecteurs de sites de presse en ligne en affinité avec les messages publicitaires — nette des coûts publicitaires. Si r_i^j est le prix négocié entre i et j pour placer un espace publicitaire sur le site de presse i, alors les annonceurs 1 et 2 ont une utilité :

$$W^1 = N_1 \int_0^{\widetilde{\psi}} G(a_1^1) \cdot d\psi + N_2 \int_0^{\widetilde{\psi}} G(a_2^1) \cdot d\psi - a_1^1 r_1^1 - a_2^1 r_2^1$$

$$W^2 = N_1 \int_{\widetilde{\psi}}^1 G(a_1^2) \cdot d\psi + N_2 \int_{\widetilde{\psi}}^1 G(a_2^2) \cdot d\psi - a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2$$

Les sites de presse. Le site de presse i invite les deux annonceurs et les lecteurs à rejoindre sa plate-forme. D'un côté, il fournit des espaces publicitaires aux annonceurs j, dont le tarif est fixé au prix unitaire r_i^j. De l'autre côté, il investit en qualité pour attirer des lecteurs. Le montant des investissement est K_i. Le profit d'un site de presse i est donc :

$$\Pi_i = a_i^1 r_i^1 + a_i^2 r_i^2 - K_i$$

Le jeu. Les deux sites de presse jouent un jeu en trois étapes. Nous pouvons le résumer comme suit :

– *Étape 1* : Les sites de presse choisissent simultanément leur investissement en qualité K_i et les annonceurs choisissent leur profil ψ^j, afin de cibler les lecteurs.
– *Étape 2* : Les sites de presse négocient avec les annonceurs le volume des espaces publicitaires disponibles sur leurs sites a_i^j et les tarifs des publicités r_i^j.
– *Étape 3* : Les lecteurs choisissent de regarder la publicité de l'annonceur 1 ou 2.

Voici également un résumé de l'ensemble des variables utilisées dans notre modèle :

$i = 1, 2$: duopole de sites de presse
$j = 1, 2$: duopole d'annonceurs
γ_i : goût du lecteur pour la qualité d'un site de presse ; fonction de K_i ; $\gamma_i \in [0, \bar{\gamma}]$
v : surplus du lecteur
t : paramètre de distance du lecteur par rapport aux publicités
δ : paramètre de désutilité du lecteur pour des volumes publicitaires importants
ψ^j : type de publicité de l'annonceur j
a_i^j : volume de publicités de l'annonceur j sur le site i
r_i^j : prix de la publicité payée par l'annonceur j pour être présent sur le site i

Chaque site de presse i négocie avec chaque annonceur j un accord pour décider du prix et du volume de publicité placée sur les pages du site. Puis, si l'annonceur j choisit de placer ses espaces publicitaires sur i avec une intensité de a_i^j, il paiera au site de presse i la somme $a_i^j r_i^j$. Chaque site de presse négocie séparément avec chaque annonceur. Les négociations entre les parties déterminent le prix r_i^j entre les sites de presse i et les annonceurs j.

Pour modéliser les négociations entre une paire d'annonceurs et les sites de presse, nous n'utilisons pas la solution de marchandage de Nash [Rubinstein, 1982, 1986] du modèle de Dukes et Gal-Or [2003]. Nous avons choisi d'expliciter la fonction $G(\cdot)$ et de trouver les espaces publicitaires a_i^j optimums qui maximisent les fonctions de rétribution des annonceurs W^j.

3 Volumes publicitaires

Pour calculer le quadruplet de solutions $(a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2)$, nous utilisons donc $G(\cdot)$ comme fonction explicite de a_i^j et ψ^j :

$$G(a_i^j, \psi^j) = (a_i^j)^\alpha[1 - |\psi - \psi^j|], \text{ avec } \alpha < 1$$

Nous définissons $G(\cdot)$ comme le taux de clic des lecteurs, qui dépend de la distance entre le profil du consommateur ψ et le profil de l'annonceur j, ψ^j, ainsi que du volume de publicité disponible sur le site de presse i, mais de manière décroissante. Plus les volumes de publicité sont importants sur un des sites de presse, moins les lecteurs cliqueraient dessus. Avec $\alpha < 1$, nous retranscrivons ici une sorte d'"effet de saturation", quand les sites de presse affichent un trop-plein de messages publicitaires.

Ainsi, $G(\cdot)$ possède les mêmes propriétés que celles décrites auparavant :

- $G(\cdot) \in [0, 1]$,
- $G(0, \psi^j) = 0$,
- $G'(\cdot) = \alpha(a_i^j)^{\alpha-1}[1 - |\psi - \psi^j)|] > 0$,
- $G''(\cdot) = \alpha(\alpha - 1)(a_i^j)^{\alpha-1}[1 - |\psi - \psi^j)|] < 0$.

Nous recherchons tout d'abord une expression de W^j, intégrant la fonction explicite $G(\cdot)$.

Lemme 1 *Étant donnée la fonction $G(\cdot)$ explicite, les rétributions des annonceurs j s'écrivent désormais,*

pour $j = 1$:

$W^1 = N_1 \left(a_1^1\right)^{\alpha} \int_0^{\widetilde{\psi}} \left[1 - |\psi - \psi_1|\right] \cdot d\psi + N_2 \left(a_2^1\right)^{\alpha} \int_0^{\widetilde{\psi}} \left[1 - |\psi - \psi_1|\right] \cdot d\psi - r_1^1 a_1^1 - r_2^1 a_2^1$

soit,

$$W^1 = \left[N_1 \left(a_1^1\right)^{\alpha} + N_2 \left(a_2^1\right)^{\alpha}\right] \left[\left(1 + \psi_1\right) \widetilde{\psi} - \tfrac{1}{2}\widetilde{\psi}^2 - \psi_1^2\right] - r_1^1 a_1^1 - r_2^1 a_2^1$$

et pour $j = 2$:

$W^2 = N_1 (a_1^2)^{\alpha} \int_{\widetilde{\psi}}^1 \left[1 - |\psi - \psi_2|\right] \cdot d\psi + N_2 (a_2^2)^{\alpha} \int_{\widetilde{\psi}}^1 \left[1 - |\psi - \psi_2|\right] \cdot d\psi - r_1^2 a_1^2 - r_2^2 a_2^2$

soit,

$$W^2 = \left[\tfrac{N_1 (a_1^2)^{\alpha} + N_2 (a_2^2)^{\alpha}}{2}\right] \left[2 \left(\psi_2 - \widetilde{\psi}\right) \left(1 - \psi_2\right) + 1 - \widetilde{\psi}^2\right] - r_1^2 a_1^2 - r_2^2 a_2^2$$

Le détail est disponible en annexe A.

Les annonceurs j choisissent sur chaque média i leur intensité de publicité a_i^j, afin de maximiser leur rétribution W^j, ce qui génère quatre conditions du premier ordre pour un équilibre unique. Prenons le cas général, où l'annonceur $j = 1$ maximise W^1 en a_i^1, avec $i = 1, 2$. La dérivée de W^1 en a_i^1, pour $i = 1, 2$, s'écrit :

$$\frac{\partial W^1}{\partial a_i^1} = \alpha \frac{N_i}{2} \left(a_i^1\right)^{\alpha - 1} \left[-\widetilde{\psi}^2 + 2\left(1 + \psi_1\right) \widetilde{\psi} - 2\psi_1^2\right]$$
$$+ \left[N_1 \left(a_1^1\right)^a + N_2 \left(a_2^1\right)^a\right] \left[1 + \psi_1 - \widetilde{\psi}\right] \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial a_i^1} - r_i^1 = 0, \text{ avec } \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial a_i^1} = -\frac{\delta}{2t(\psi_2 - \psi_1)} < 0$$

Or, $\widetilde{\psi}^2 - 2(1+\psi_1)\widetilde{\psi} + 2\psi_1^2 < 0$, ce qui implique qu'il n'y ait pas de solution analytique dans ce cas de figure.

Preuve. Soit $f(\psi) = \psi^2 - 2(1+\psi_1)\psi + 2\psi_1^2$
Notons que $f(\psi_1) = \psi_1^2 - 2(1+\psi_1)\psi_1 + 2\psi_1^2 = (\psi_1 - 2)\psi_1 < 0$
Puisque $\frac{\partial f(\psi)}{\partial \psi} = 2(\psi - (1+\psi_1)) < 0$ pour tout $0 \leq \psi \leq 1$,
alors $f(\psi) \leq f(\psi_1) < 0$ pour tout $\psi \geq \psi_1$. Ainsi $f\left(\widetilde{\psi}\right) \leq f(\psi_1) < 0$ ■

Puisqu'il n'y a pas de solution analytique qui puisse être déterminée pour $\alpha < 1$, pour résoudre cette seconde étape du jeu, nous faisons ici l'hypothèse restrictive que $\alpha = 1$, ce qui signifie que le retour d'une campagne publicitaire de l'annonceur j sur le site de presse i, en termes de taux de clic, pour tout consommateur, est constant.

Remarque 2 :

Nous vérifions dans l'annexe B qu'il n'existe qu'une seule solution intérieure, en calculant la dérivée seconde de W^1 en a_1^1. Nous montrons que cela n'est le cas que lorsque
$\left(\widetilde{\psi} - \psi_1\right)^2 + (1-\psi_1)^2 - 3 < 2(1-\psi_1)^2 - 3 < 0$

Nous obtenons donc :

$$W^1 = \left[N_1 a_1^1 + N_2 a_2^1\right]\left[(1+\psi_1)\widetilde{\psi} - \frac{1}{2}\widetilde{\psi}^2 - \psi_1^2\right] - r_1^1 a_1^1 - r_2^1 a_2^1$$

et :

$$W^2 = \left[\frac{N_1 a_1^2 + N_2 a_2^2}{2}\right]\left[2\left(\psi_2 - \widetilde{\psi}\right)(1-\psi_2) + 1 - \widetilde{\psi}^2\right] - r_1^2 a_1^2 - r_2^2 a_2^2$$

En maximisant W^1 en a_1^1 et en a_2^1, nous obtenons le système d'équations suivantes :

$$\frac{\partial W^1}{\partial a_1^1} = -\frac{N_1}{2}\left[\widetilde{\psi}^2 - 2(1+\psi_1)\widetilde{\psi} + 2\psi_1^2\right] + \left[N_1 a_1^1 + N_2 a_2^1\right]\left[1 + \psi_1 - \widetilde{\psi}\right]\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial a_1^1} - r_1^1 = 0$$

$\frac{\partial W^1}{\partial a_2^1} = -\frac{N_2}{2}\left[(1+\psi_1)\widetilde{\psi} - \frac{1}{2}\widetilde{\psi}^2 - \psi_1^2\right] + \left[N_1 a_1^1 + N_2 a_2^1\right]\left[1+\psi_1-\widetilde{\psi}\right]\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_2^1} - r_2^1 = 0$

Celui-ci peut se réécrire ainsi :

$$W_1^1 = 0 \Rightarrow F_1\left(a_1^1\right)^2 - 2a_1^1 G_1 + H_{12}\left(a_2^1\right)^2 - 2G_{12}a_2^1 + P_1\left(a_.^2\right) + Q_1^1 = 0 \quad (1)$$

$$W_2^1 = 0 \Rightarrow F_2\left(a_2^1\right)^2 - 2a_2^1 G_2 + H_{21}\left(a_1^1\right)^2 - 2G_{21}a_1^1 + P_2\left(a_.^2\right) + Q_2^1 = 0 \quad (2)$$

Proposition 2 *A l'optimum, nous obtenons les solutions suivantes pour* a_1^1 *et* a_2^1 *:*

$$\left(a_1^1\right)^{-,+} = \frac{G_1 \pm \sqrt{G_1^2 - F_1\left(H_{12}\left(a_2^1\right)^2 - 2G_{12}a_2^1 + P_1\left(a_.^2\right) + Q_1^1\right)}}{F_1}$$

$$\left(a_2^1\right)^{-,+} = \frac{G_2 \pm \sqrt{G_2^2 - F_2\left(H_{21}\left(a_1^1\right)^2 - 2G_{21}a_1^1 + P_2\left(a_.^2\right) + Q_2^1\right)}}{F_2}$$

Ces valeurs correspondent aux volumes de publicité placés sur les médias 1 et 2, pour lesquels l'annonceur 1 maximise sa rétribution W^1*. Elles diminuent lorsque les prix des médias,* r_1^1 *et* r_2^1*, et le paramètre de désutilité des lecteurs au volume de publicité,* δ*, augmentent. Elles augmentent lorsque les profils des annonceurs sont plus différenciés (*ψ_1 *et* ψ_2 *sont éloignés) et que les parts de marché des médias,* N_1 *et* N_2 *sont proches.*

Le détail est disponible dans les annexes $C1$ et $C2$.

De même, dans le cas particulier où $\alpha = 1$,en maximisant W^2 en a_1^2 et en a_2^2, nous obtenons le système d'équations suivantes :

$\frac{\partial W^2}{\partial a_1^2} = 0$
$\Longrightarrow N_1 \left[2\left(\psi_2 - \widetilde{\psi}\right)(1-\psi_2) + 1 - \widetilde{\psi}^2\right] - 2\left[N_1 a_1^2 + N_2 a_2^2\right]\left(\widetilde{\psi} + 1 - \psi_2\right)\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial a_1^2} - 2r_1^2 = 0$

et :

$\frac{\partial W^2}{\partial a_2^2} = 0$
$\Longrightarrow N_2 \left[2\left(\psi_2 - \widetilde{\psi}\right)(1-\psi_2) + 1 - \widetilde{\psi}^2\right] - 2\left[N_1 a_1^2 + N_2 a_2^2\right]\left(\widetilde{\psi} + 1 - \psi_2\right)\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial a_1^2} - 2r_2^2 = 0$

Nous pouvons réécrire les expressions ainsi :

$$W_1^2 = 0 \Rightarrow K_1\left(a_1^2\right)^2 - 2a_1^2 L_1 + M_{12}\left(a_2^2\right)^2 - 2L_{12}a_2^2 + S_1\left(a_\cdot^1\right) + T_1^2 = 0 \quad (3)$$

$$W_2^2 = 0 \Rightarrow K_2\left(a_2^2\right)^2 - 2a_2^2 L_2 + M_{21}\left(a_1^2\right)^2 - 2L_{21}a_1^2 + S_2\left(a_\cdot^1\right) + T_2^2 = 0 \quad (4)$$

Proposition 3 *A l'optimum, nous obtenons les solutions suivantes pour a_1^2 et a_2^2 :*

$$\left(a_1^2\right)^{-,+} = \frac{L_1 \pm \sqrt{\left(L_1\right)^2 - K_1\left[M_{12}\left(a_2^2\right)^2 - 2L_{12}a_2^2 + S_1\left(a_\cdot^1\right) + T_1^2\right]}}{K_1}$$

$$\left(a_2^2\right)^{-,+} = \frac{L_2 \pm \sqrt{\left(L_2\right)^2 - K_2\left[M_{21}\left(a_1^2\right)^2 - 2L_{21}a_1^2 + S_2\left(a_\cdot^1\right) + T_2^2\right]}}{K_2}$$

Ces valeurs correspondent aux volumes de publicité placés sur les médias 1 et 2, pour lesquels l'annonceur 2 maximise sa rétribution W^2. Elles diminuent lorsque les prix des médias, r_1^2 et r_2^2, et le paramètre de désutilité des lecteurs au volume de publicité, δ, augmentent. Elles augmentent lorsque les profils des annonceurs sont plus différenciés (ψ_1 et ψ_2 sont éloignés) et que les parts de marché des médias, N_1 et N_2 sont proches.

Le détail est disponible dans l'annexe $C3$.

Nous avons élaboré une simulation intégrant les résultats du modèle. Dans chacun des cas, nous avons cherché à identifier quelle était la solution retenue par l'annonceur pour maximiser sa rétribution W^j. Nous avons pu établir que parmi les solutions présentées ici, toutes les solutions $(a_i^j)^+$ offraient des résultats en W^j supérieures aux solutions $(a_i^j)^-$.

Nous pouvons également établir des résultats pour la somme des investissements effectués par les annonceurs 1 et 2, soit pour $a_.^1$ et $a_.^2$. A cette fin, si nous supposons que $N_1 \neq N_2$, nous effectuons la soustraction $(4.2)-(4.1)$ et nous obtenons (voir détail en annexe D) :

$$\delta^2 \left(a_.^1\right)^2 - 2\delta \left[\delta a_.^2 - C\right] a_.^1 + \delta \left(\delta \left(a_.^2\right)^2 - 2Ca_.^2\right) + \Omega_1 = 0 \qquad (5)$$

avec $C = t\left(\psi_2 - \psi_1\right)\left(2 + \psi_1 - \psi_2\right)$

et $\Omega_1 = t^2 \left(\psi_2 - \psi_1\right)^2 \left[8\left(\frac{r_1^1 - r_2^1}{N_1 - N_2}\right) - \left[4\left(\psi_1 + \psi_2\right) - 4\psi_1^2 - \left(\psi_1 - \psi_2\right)^2\right]\right]$

En procédant de même avec les équations (4.3) et (4.4), nous obtenons ainsi :

$$\delta^2 \left(a_.^2\right)^2 - 2\delta \left[\delta a_.^1 - C\right] a_.^2 + \delta \left(\delta \left(a_.^1\right)^2 - 2Ca_.^1\right) + \Omega_2 = 0 \qquad (6)$$

avec C défini auparavant

et $\Omega_2 = t^2 \left(\psi_2 - \psi_1\right)^2 \left[8\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{N_1 - N_2}\right) - \left[4\psi_2\left(1 - \psi_2\right) + 4\left(1 - \psi_1\right) - \left(\psi_1 - \psi_2\right)^2\right]\right]$

Avec le système regroupant les équations (4.5) et (4.6), nous obtenons les solutions suivantes pour $a_.^1$ et $a_.^2$:

$$\begin{aligned} a_.^1 &= \left(\frac{1}{1-\delta}\right) C + \frac{\sqrt{C^2 - \Omega_2} + \delta\sqrt{C^2 - \Omega_1}}{\delta^2 - 1} \\ a_.^2 &= \left(\frac{1}{1-\delta}\right) C + \frac{\sqrt{C^2 - \Omega_1} + \delta\sqrt{C^2 - \Omega_2}}{\delta^2 - 1} \end{aligned}$$

En remplaçant C, Ω_1 et Ω_2 par leurs valeurs respectives, $a_.^1$ par exemple peut s'écrire :

$$a_{\cdot}^{1}=\frac{t\left(\psi_2-\psi_1\right)}{\delta^2-1}\left[\begin{array}{c}\left(\psi_2-\psi_1-2\right)\left(1+\delta\right)\\ +2\sqrt{2-\psi_2^2-2\left(\frac{r_1^2-r_2^2}{N_1-N_2}\right)}+2\delta\sqrt{1+\psi_1\left(2-\psi_1\right)-2\left(\frac{r_1^1-r_2^1}{N_1-N_2}\right)}\end{array}\right]$$

Remarque 3
$C^2-\Omega_1=4t^2\left(\psi_2-\psi_1\right)^2\left[1+\psi_1\left(2-\psi_1\right)-2\left(\frac{r_1^1-r_2^1}{N_1-N_2}\right)\right]$
$C^2-\Omega_2=4t^2\left(\psi_2-\psi_1\right)^2\left[2-\psi_2^2-2\left(\frac{r_1^2-r_2^2}{N_1-N_2}\right)\right]$
Nous devons vérifier que $C^2-\Omega_1\geq 0$ and $C^2-\Omega_2\geq 0$. Soit :
$1+\psi_1\left(2-\psi_1\right)\geq 2\left(\frac{r_1^1-r_2^1}{N_1-N_2}\right)$ et $\psi_2^2\geq 2\left(\frac{N_1-N_2-\left(r_1^2-r_2^2\right)}{N_1-N_2}\right)$

4 Profils des annonceurs

Les calculs nécessaires à la résolution analytique de cette partie du jeu (dérivées des W^j en ψ_1 et ψ_2) sont fastidieux. Afin d'obtenir une vision illustrative du résultat, nous avons d'abord effectué une simulation de W^1, la fonction de rétribution de l'annonceur 1, en fonction de son profil ψ_1, en figeant celui de l'annonceur concurrent, ψ_2. De même, nous avons réalisé une simulation de W^2 en fonction de ψ_2, en figeant ψ_1 (voir figures 4.1 et 4.2). Ainsi, nous pouvons observer si W^1 et W^2 atteignent leur maximum lorsque les profils des annonceurs sont différenciés, c'est-à-dire pour des valeurs de ψ_1 et de ψ_2 éloignées. Les résultats graphiques de ces simulations montrent que la tendance est davantage à une différenciation forte entre les annonceurs. L'optimum des W^j est atteint dans les deux cas lorsque ψ_1 et ψ_2 sont éloignés l'un de l'autre. Dans notre exemple, W^1 atteint son maximum lorsque $\psi_1=0,4$, avec $\psi_2=1$ et W^2 atteint son maximum lorsque $\psi_2=0,7$, avec $\psi_1=0,4$.

Nous proposons une analyse des cas particuliers extrêmes de différenciation minimale ($\lim\left(\psi_2-\psi_1\right)=0$) et maximale ($\lim\left(\psi_2-\psi_1\right)=1$) des annonceurs. Celle-ci nous permettra d'obtenir une vision approximative du résultat du modèle à l'équilibre. Dans chacun des cas, nous tentons de développer les solutions pour les annonceurs, en volumes a_i^j et en prix de publicité r_i^j. A l'aide de la simulation du modèle, nous étudions aussi les solutions dans le cas d'une différenciation intermédiaire.

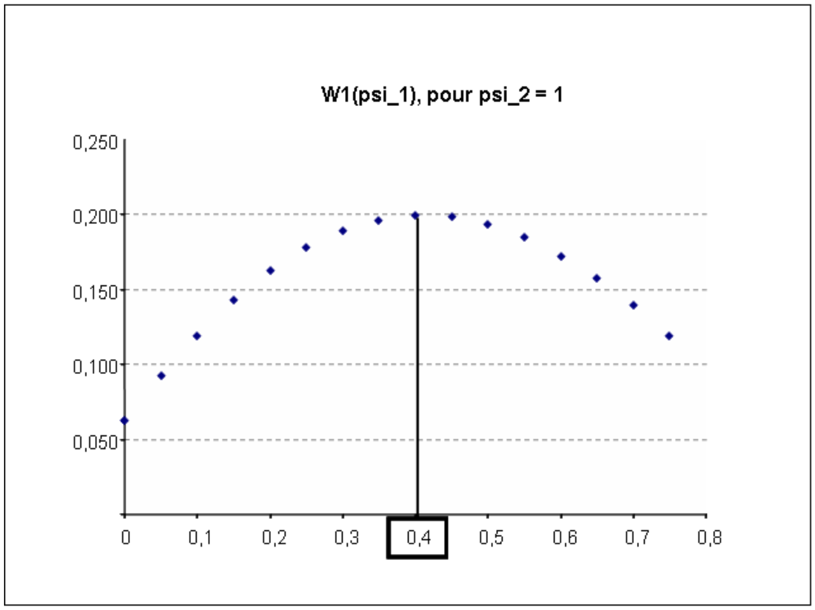

Fig. 1 – Simulation de W1 en fonction de psi1

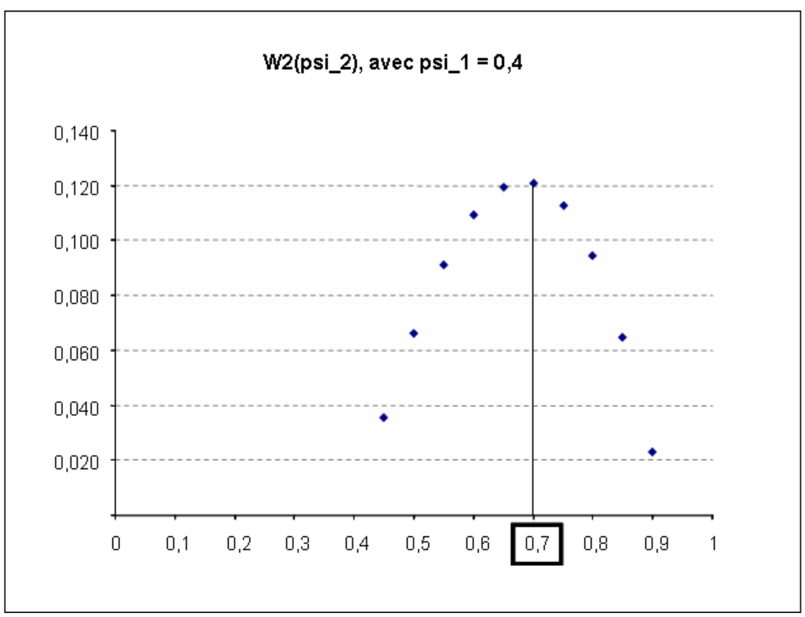

Fig. 2 – Simulation de W2 en fonction de psi2

Différenciation minimale

Si $\lim(\psi_2 - \psi_1) = 0$ et $N_1 \neq N_2$, l'égalité (4.5) s'écrit :

$$\left(a_1^1\right)^2 + \left(a_2^1\right)^2 + 2a_1^1 a_2^1 - 2\left(a_2^1 + a_1^1\right) a_\cdot^2 + \left(a_\cdot^2\right)^2 = 0$$

Soit : $\left(a_\cdot^1 - a_\cdot^2\right)^2 = 0$, c'est-à-dire : $a_\cdot^1 = a_\cdot^2$.

De même, l'égalité (4.6) s'écrit, lorsque $(N_1 \neq N_2)$:

$$\left(a_\cdot^1\right)^1 + \left(a_\cdot^1\right)^2 + 2a_\cdot^1 a_\cdot^1 = 0$$

Soit à nouveau : $\left(a_\cdot^1 - a_\cdot^2\right)^2 = 0$, c'est-à-dire : $a_\cdot^1 = a_\cdot^2$.

Nous obtenons alors dans les deux cas : $a_\cdot^1 = a_\cdot^2$

Dans ce cas de figure, où les annonceurs ne se différencieraient pas, la solution induit que les deux annonceurs choisiraient d'acheter exactement les mêmes volumes d'espaces publicitaires. Dans cette configuration où la publicité est diffusée de manière indifférenciée, les annonceurs ne voient pas d'intérêt à pondérer leurs investissements : ils diffusent donc la même quantité de publicité sur les deux médias.

Par ailleurs, si les profils des annonceurs ψ_1 et ψ_2 sont identiques et $\lim(\psi_2 - \psi_1) = 0$, alors $\widetilde{\psi} \to \infty$, ce qui implique que $W^j \to \infty$ également. Dans ce cas de figure, on assiste alors à un phénomène de surenchère des annonceurs, où leur rétribution augmente tant qu'ils achètent davantage de volumes publicitaires.

Différenciation maximale

Si $\psi^1 - \psi^2 = 1$ et $(N_1 \neq N_2)$, l'équation (4.5) s'écrit :

$$\delta^2 \left(a_\cdot^1\right)^2 - 2\delta a_\cdot^1 \left(\delta a_\cdot^2 - t\right) + \delta a_\cdot^2 \left[\delta a_\cdot^2 - 2t\right] + t^2 \left(\frac{8\left(r_1^1 - r_2^1\right)}{N_1 - N_2} - 3\right) = 0$$

Et l'équation (4.6) de même :

$$\delta^2\left(a^2_\cdot\right)^2-2\delta a^2_\cdot\left(\delta a^1_\cdot-t\right)+\delta a^1_\cdot\left(\delta a^1_\cdot-2t\right)+t^2\left(\frac{8\left(r^2_1-r^2_2\right)}{N_1-N_2}-3\right)=0$$

Nous obtenons alors les résultats suivants pour les volumes de publicités achetés par les annonceurs j, 1 et 2 :

$$a^1_\cdot=\frac{t}{1-\delta^2}[\delta+1+2(\sqrt{1-2(\frac{r^2_1-r^2_2}{N_1-N_2})}+\delta\sqrt{1-2(\frac{r^1_1-r^1_2}{N_1-N_2})})]$$

$$a^2_\cdot=\frac{t}{1-\delta^2}[\delta+1+2(\sqrt{1-2(\frac{r^1_1-r^1_2}{N_1-N_2})}+\delta\sqrt{1-2(\frac{r^2_1-r^2_2}{N_1-N_2})})]$$

Ici, les volumes de publicité achetés par l'annonceur j (j=1,2) dépendent de la différence des prix des espaces publicitaires négociés par l'annonceur j avec les sites de presse i, ainsi que de la différence des prix négociés par l'annonceur concurrent. Ils dépendent également de la différence des parts de marché des deux médias, N_1 et N_2. Cette dernière étant donnée — puisque selon l'hypothèse de notre modèle, les lecteurs sont fidèles au média i qu'ils choisissent au moment de leur connexion — nous pouvons discuter de l'interaction des autres variables.

De fait, les volumes de publicité achetés par les annonceurs aux sites de presse sont plus importants lorsqu'ils se différencient entre eux sur la nature de leurs messages publicitaires. Toutefois, les expressions des volumes publicitaires ne sont positives qu'à certaines conditions.

Par hypothèse, $N_1 < N_2$ et $N_1 - N_2 < 0$, donc pour que $a^1_\cdot$ et $a^2_\cdot$ soient positifs, les prix négociés doivent remplir les conditions suivantes :

— $r^2_2 < r^2_1$: le prix négocié par l'annonceur 2 avec le site de presse 1 est plus élevé que le prix négocié avec le site de presse 2,

— $r^1_2 < r^1_1$: le prix négocié par l'annonceur 1 avec le site de presse 1 est plus élevé que le prix négocié avec le site de presse 2.

Nous observons donc que pour qu'il y ait une solution en a^j_i en situation de différenciation maximale, les prix des espaces de publicité sur le site de presse ayant la plus petite part de marché sont les plus élevés du marché.

Différenciation "intermédiaire"

Dans notre simulation, lorsque ψ^1 et ψ^2 sont différenciés, nous constatons qu'il existe deux types de solution au modèle.

Une solution intermédiaire

Il existe une solution intermédiaire en a_i^j lorsque les prix et les parts de marché des médias $i = 1, 2$ sont identiques. Le choix des annonceurs est alors indifférent entre les deux médias, car leurs rétributions W_1 et W_2 sont les mêmes selon qu'ils investissent sur l'un ou l'autre des supports.

En effet, lorsque $N_1 = N_2$ et $r_1^1 = r_2^1$, alors :

$(a_2^1)^* \mid_{W_1^1=0} = (a_2^1)^* \mid_{W_2^1=0}$, et par conséquent, $(W^1)^* \mid_{W_1^1=0} = (W^1)^* \mid_{W_2^1=0}$

De la même manière, lorsque $N_1 = N_2$ et $r_1^2 = r_2^2$, alors :

$(a_2^2)^* \mid_{W_1^2=0} = (a_2^2)^* \mid_{W_2^2=0}$, et par conséquent, $(W^2)^* \mid_{W_1^2=0} = (W^2)^* \mid_{W_2^2=0}$

Le détail de la démonstration analytique est disponible en annexe E et une représentation graphique de ce résultat dans le graphe 4.3. Nous y voyons les stratégies de meilleure réponse de l'annonceur 1 en fonction du volume de publicité $a_.^2$ investi par l'annonceur 2 et inversement, celles de l'annonceur 2, en fonction du volume $a_.^1$ investi par l'annonceur 1. Plus précisément, le graphe représente les valeurs de a_2^1 pour lesquelles $W_1^1 = 0$ et $W_2^1 = 0$, ainsi que les valeurs de a_2^2 pour lesquelles $W_1^2 = 0$ et $W_2^2 = 0$, lorsque les parts de marché des médias N_1 et N_1 sont égales et les tarifs publicitaires des médias, r_1^j et r_2^j, sont égaux. Les courbes des fonctions de meilleure réponse se confondent quasiment et se croisent en un point.

Il est intéressant de noter que cet équilibre de Nash n'est possible pour les annonceurs j qu'en fonction de paramètres dépendants des médias i : leurs parts de marché auprès des lecteurs et les prix auxquels sont commercialisés leurs espaces publicitaires.

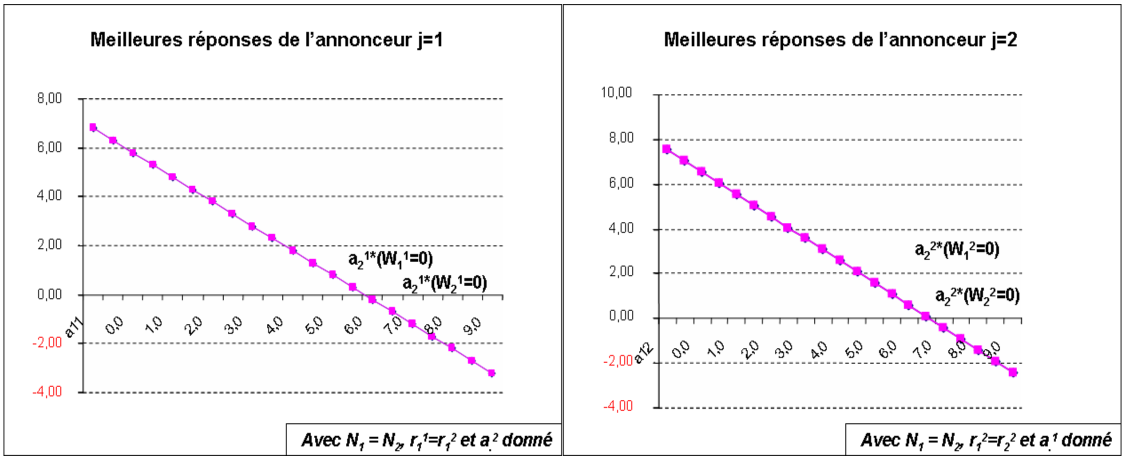

FIG. 3 – Fonctions de meilleure réponse des annonceurs lorsque $N_1 = N_2$, $r_1^1 = r_2^1$ et $r_1^2 = r_2^2$

Des solutions en coin

Les autres solutions du jeu sont des solutions en coin, présentant des résultats extrêmement tranchés. Les rétributions des annonceurs sont plus importantes lorsque la différenciation est plus élevée. Des illustrations sont disponibles dans les graphes 4.4 et 4.5. Nous y montrons les résultats de notre simulation. Les courbes représentent les fonctions de rétribution des annonceurs W^j. Les valeurs de a_1^j varient arbitrairement. Par contre, celles de a_2^j représentent les valeurs optimales en W^j, calculées à la fois lorsque $W_1^j = 0$ et $W_2^j = 0$. Nous constatons que W^j atteint sa valeur optimale grâce à une solution en coin, où le média 2 est privilégié et les volumes de publicités investis sur le média 1 sont nuls. Lorsque ψ_1 et ψ_2 sont éloignés, les valeurs optimales de W^1 et W^2 sont plus élevées.

Dans tous les cas, le média $i = 2$, dont l'audience N_2 est la plus élevée est celui pour lequel la rétribution de l'annonceur est la plus importante.

Les annonceurs semblent exclure totalement le média $i = 1$, c'est-à-dire celui dont la part de marché est la plus faible et donc les prix sont les plus élevés. Nous n'aurions que des solutions du type $(0, a_2^1, 0, a_2^2)$, avec $a_1^1 = a_1^2 = 0$, qui maximisent les rétributions des annonceurs W^1 et W^2.

Nous observons également que la différence entre les taux de clic dépend

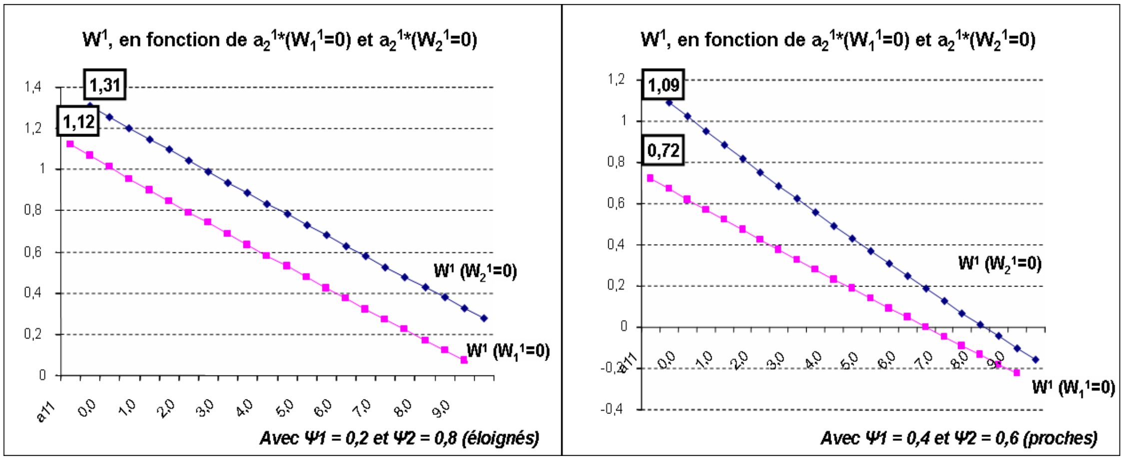

Fig. 4 – Simulation de W1 en fonction de $a21*$

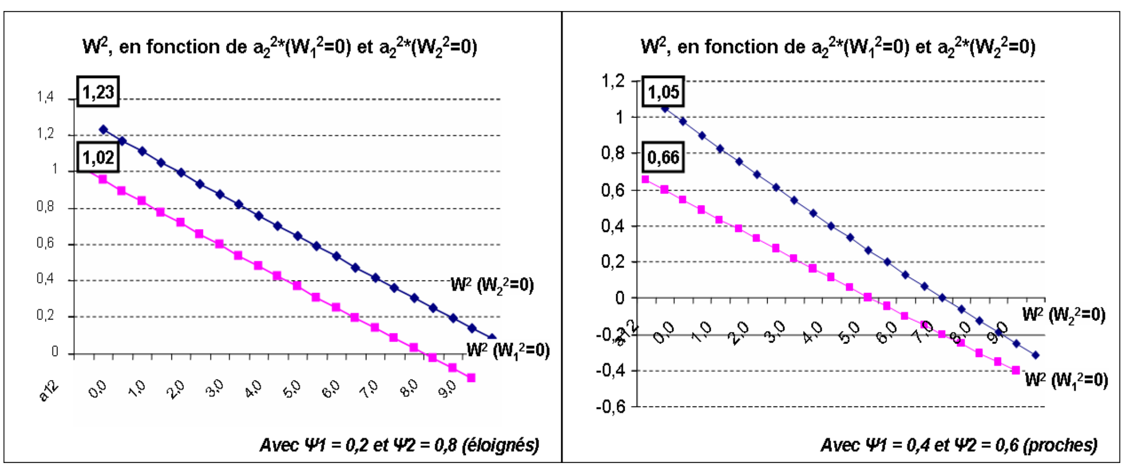

Fig. 5 – Simulation de W2 en fonction de $a22*$

de la différence des volumes de publicité achetés par les annonceurs. Par exemple, pour l'annonceur $j = 1$, les taux de clic sur chacun des médias $i = 1, 2$ correspondent aux valeurs de :

$$G(a_1^1, \psi^1) = (a_1^1)[1 - |\psi - \psi^1|] \text{ et } G(a_2^1, \psi^1) = (a_2^1)[1 - |\psi - \psi^1|], \text{ avec } \alpha = 1$$

Ainsi, pour un annonceur j, $G(a_2^1) > G(a_1^1)$ suppose simplement que $a_2^1 > a_1^1$. Ainsi, à profil donné, l'annonceur privilégie le média où le taux de clic est plus performant, c'est-à-dire celui où il place le plus d'espaces publicitaires. L'annonceur donne donc ici un primat au volume et à l'audience de masse, ce qui peut expliquer en partie le recours au média dont la part de marché est la plus élevée.

Les volumes publicitaires investis par les deux annonceurs semblent aussi très proches les uns des autres. Nous retrouvons la condition énoncée précédemment pour que $\psi_1 \leq \widetilde{\psi} \leq \psi_2$. Nous observons ainsi dans nos simulations une certaine modération des annonceurs, du fait du faible écart entre leurs investissements publicitaires.

La stratégie de meilleure réponse des annonceurs j à cette étape du jeu est au mieux indifférente au type de médias, à condition que ceux-ci puissent présenter la même audience et les mêmes niveaux de prix. Sinon, les annonceurs j semblent se tourner unilatéralement vers le média i dont la part de marché est la plus importante pour maximiser leurs rétributions. Il semble que les solutions en coin constituent des stratégies dominantes.

5 Investissement des médias

Étant données les fonctions de réponse des annonceurs, les médias fixent leurs niveaux d'investissement en qualité de manière à optimiser leur profit. Pour rappel, le profit d'un média $i = 1, 2$ s'écrit :

$$\Pi_i = a_i^1 r_i^1 + a_i^2 r_i^2 - K_i$$

où K_i est le montant des investissements du site de presse i. Dans la mesure où les annonceurs sont attirés par le média à la plus forte part de marché pour y mener une stratégie publicitaire d'achat de forts volumes d'espaces à bas prix, le site qui en est le récipiendaire préférera maximiser ses profits en minimisant le coût de ses investissements en qualité K_i. Le site dominant n'aurait donc pas d'incitation particulière à investir en qualité, car ce type de stratégie n'aurait pas d'influence sur l'audience. Par hypothèse, les visiteurs de ce site sont captifs, puisque les parts de marché des médias i sont établis à N_1 et N_2 et ne sont pas soumises à la sanction des lecteurs par *multi-homing*. Ce dernier point ne peut donc inciter le site de presse i à investir en qualité pour fidéliser ses lecteurs, puisqu'il n'est pas menacé par la concurrence de l'autre site de presse.

6 Conclusion

Notre modèle présente la situation d'une concurrence entre sites de presse, lorsque ceux-ci sont réduits à de simples supports pour des annonceurs soucieux de toucher une audience de masse. Il n'existe de solution intérieure à l'équilibre que lorsque les médias sont indifférenciés sur le marché publicitaire : à parts de marché égales et tarifs équivalents, les annonceurs peuvent aussi bien investir sur l'un ou l'autre des médias. Sinon, il n'existe que des solutions en coin, lorsque les annonceurs sont différenciés entre eux : les deux annonceurs choisissent alors de placer leurs annonces publicitaires sur le site dont la part de marché est la plus élevée, achetant ainsi la possibilité de toucher le plus grand nombre de lecteurs, à l'exclusion totale de l'autre site. Or, le site recueillant les investissements publicitaires des annonceurs dispose d'une audience captive, il est donc incité à maximiser sa marge en minimisant ses investissements en qualité.

Cette hypothèse de captivité des lecteurs est très forte. Pour se rapprocher des conditions de marché, il faudrait aussi explorer la situation de sites de presse concurrents, lorsque les lecteurs peuvent sanctionner une des plates-formes et la quitter pour la plate-forme concurrente (*multi-homing*). Les conditions de la concurrence pourraient en être modifiées. Cela dit, selon le modèle de Kind *et al.* [2004], lorsque la concurrence devient trop difficile pour des médias sur Internet (trop de médias concurrents), le financement des firmes devient exclusivement publicitaire et le financement de la qualité des contenus diminue. Il faudra alors peut-être repenser la mesure de performance dans la fonction de rétribution de l'annonceur (ici le taux de clic $G(\cdot)$) et y introduire la capacité du média i à fournir à l'annonceur j une cible de lecteurs proche de celle qu'il recherche.

Par ailleurs, les modèles de différenciation horizontale dans les médias, comme notre modèle, considèrent la taille de l'audience comme le levier clé pour attirer des annonceurs. Or, une audience ciblée intéresse davantage certains annonceurs soucieux de toucher un public particulier, plutôt que faire passer un message à une audience de masse. Parmi les stratégies analysées dans le chapitre 4, les firmes qui réussissent à maintenir des tarifs publicitaires élevés sont aussi celles qui investissent dans la qualité de leurs contenus pour attirer des publics ciblés et qualifiés pour les annonceurs. Si certains annonceurs se soucient davantage du type de lecteurs auxquels ils s'adressent via les plates-formes (ici les sites de presse), l'équilibre économique de celles-ci peut être modifié.

Une des particularités d'Internet est que les technologies de suivi permettent aux annonceurs de cibler très précisément les centres d'intérêt des lecteurs, donc les produits à promouvoir sur les pages de sites qu'ils visitent. Dans le cas où les messages publicitaires sont proches des attentes des lecteurs, ceux-ci sont reçus comme une information plus que comme une nuisance. Si les lecteurs trouvent un bénéfice net positif des publicités, les interactions de marché peuvent être différentes que celles décrites auparavant. Certains annonceurs et éditeurs sont prêts à investir pour s'approcher de l'environnement informationnel idéal de leurs lecteurs, tant pour les contenus que pour les publicités. Les journaux en ligne peuvent investir en qualité pour attirer une audience plus qualifiée. Les annonceurs peuvent investir pour différencier leurs messages auprès de l'audience qu'ils souhaitent cibler, au lieu de proposer un seul message pour tous les types de lecteurs. Ceux-ci pourraient être prêts à payer un tarif plus élevé pour des publicités sur des sites particuliers, au lieu d'accroître leur pression publicitaire sur n'importe quel site promettant une audience de masse. Par exemple, parmi les sites français grand public proposant des informations économiques, nous pouvons comparer *LaTribune.fr*, le site d'un des deux principaux quotidiens de cette catégorie de presse et *L'Expansion.com*, le site d'un magazine économique mensuel. Le second offre des contenus plus analytiques et attire une plus petite audience que le premier, mais aussi une audience plus qualifiée pour les annonceurs. Par conséquent, les tarifs officiels du CPM pour une bannière diffèrent significativement : 40 euros pour une publicité sur *LaTribune.fr* au lieu de 50 euros pour *L'Expansion.fr*.

A l'appui d'une étude empirique sur les quotidiens britanniques et irlandais, Thompson [1989] expliquait déjà pour la presse traditionnelle que la relation entre la diffusion d'un titre et la proportion des lecteurs des catégories sociales les plus influentes est négative. La littérature sur la presse souligne davantage l'importance de la diffusion d'un journal pour déterminer le prix de ses espaces publicitaires, mais elle ne prend pas en compte le rôle des caractéristiques de ses lecteurs. Selon l'auteur, en se différenciant fortement par la qualité de leur produit, certains journaux ont une diffusion moindre, mais attirent ces catégories de lecteurs recherchées par les annonceurs et peuvent fixer des tarifs plus élevés.

Ce modèle de financement alternatif mériterait d'être creusé, notamment pour les éditeurs confrontés à des agrégateurs d'information dont les coûts de structure et les objectifs diffèrent. Dans le débat sur le choix du "bon" modèle économique, il existerait donc d'autres options, pour devenir profitable, que la tarification des contenus pour le consommateur final, notamment parce que les firmes de l'industrie de la presse sur Internet ont des coûts fixes plus bas que dans l'industrie traditionnelle[4].

[4] Le groupe Norvégien *Schibsted*, propriétaire notamment des journaux gratuits *20 Minutes*, réalise un EBITDA de 17 % sur son activité de presse en ligne et seulement 7,8 % sur son activité de presse traditionnelle. Désormais, le pôle Internet du groupe contribue à hauteur de 15 % de la marge globale de l'entreprise (résultats 2006, source : Ixis Securities)

Références

S.P. Anderson et S. Coate : Market provision of broadcasting : A welfare analysis. Virginia Economics Online Papers 358, 2003.

L. Benzoni et M. Bourreau : Mimétisme ou contre-programmation : un modèle de concurrence entre programmes pour la télévision en clair. *Revue d'Economie Politique*, 111(6):885–908, 2001.

A. Dukes et E. Gal-Or : Minimum differentiation in commercial media markets. *Journal of Economics and Management Strategy*, pages 291–325, 2003.

J.J. Gabszewicz et X.Y. Wauthy : Markets with cross network externalities as vertically differentiated markets. Nov. 2005.

M. Gentzkow : Valuing new goods in a model with complementarity : Online newspapers. *American Economic Review, Forthcoming*, Jan. 2006.

A. Irmen et J.-F. Thisse : Competition in multi-characteristics spaces : Hotelling was almost right. *Journal of Economic Theory*, 78:76–102, 1998.

H.J. Kind, T. Nilssen et L. Sorgard : Financing of media firms : Does competition matter ? Working Paper, Sept. 2004.

A. Rubinstein : Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica*, 50(1):97–109, Jan. 1982.

A. Rubinstein : The nash bargaining solution in economic modelling. *The RAND Journal of Economics*, 17(2):176–188, Summer 1986.

R. S. Thompson : Circulation versus advertiser appeal in the newspaper industry : An empirical investigation. *The Journal of Industrial Economics*, 37(3):259–271, 1989.

Annexes

A Démonstration du Lemme 1

Avec $G(\cdot)$ explicite, les rétributions W^j des annonceurs j s'écrivent désormais :

Pour $j = 1$:

$W^1 = N_1 \left(a_1^1\right)^\alpha \int_0^{\widetilde{\psi}} [1 - |\psi - \psi_1|] \cdot d\psi + N_2 \left(a_2^1\right)^\alpha \int_0^{\widetilde{\psi}} [1 - |\psi - \psi_1|] \cdot d\psi - r_1^1 a_1^1 - r_2^1 a_2^1$
$= \left[N_1 \left(a_1^1\right)^\alpha + N_2 \left(a_2^1\right)^\alpha\right] \left[\int_0^{\psi 1} (1 - (\psi_1 - \psi)) \cdot d\psi + \int_{\psi_1}^{\widetilde{\psi}} (1 - (\psi - \psi_1)) \cdot d\psi\right]$
$-r_1^1 a_1^1 - r_2^1 a_2^1$
$= \left[N_1 \left(a_1^1\right)^\alpha + N_2 \left(a_2^1\right)^\alpha\right] \left[\left[(1 - \psi_1) \psi + \frac{1}{2}\psi^2\right]_0^{\psi_1} + \left[(1 + \psi_1) \psi - \frac{1}{2}\psi^2\right]_{\psi_1}^{\widetilde{\psi}}\right]$
$-r_1^1 a_1^1 - r_2^1 a_2^1$
$= \left[N_1 \left(a_1^1\right)^\alpha + N_2 \left(a_2^1\right)^\alpha\right] \left[(1 + \psi_1) \widetilde{\psi} - \frac{1}{2}\widetilde{\psi}^2 - \psi_1^2\right] - r_1^1 a_1^1 - r_2^1 a_2^1$

Pour $j = 2$:

$W^2 = N_1(a_1^2)^\alpha \int_{\widetilde{\psi}}^1 [1 - |\psi - \psi_2|] \cdot d\psi + N_2(a_2^2)^\alpha \int_{\widetilde{\psi}}^1 [1 - |\psi - \psi_2|] \cdot d\psi - r_1^2 a_1^2 - r_2^2 a_2^2$

$= \left[N_1(a_1^2)^\alpha + N_2(a_2^2)^\alpha\right] \left[\int_{\widetilde{\psi}}^{\psi_2} (1 - \psi_2 + \psi) \cdot d\psi + \int_{\psi_2}^1 (1 + \psi_2 - \psi) \cdot d\psi\right] - r_1^2 a_1^2 - r_2^2 a_2^2$

$= [\frac{N_1(a_1^2)^\alpha + N_2(a_2^2)^\alpha}{2}] \left[2 \left(\psi_2 - \widetilde{\psi}\right) (1 - \psi_2) + 1 - \widetilde{\psi}^2\right] - r_1^2 a_1^2 - r_2^2 a_2^2$

B Démonstration de la Remarque 2

Nous vérifions en calculant la dérivée seconde de W^1 en a_1^1 s'il n'existe qu'une seule solution intérieure :

$$\frac{\partial^2 W^1}{\partial \left(a_1^1\right)^2} = -\left[-N_1\left(1+\psi_1-\widetilde{\psi}\right)\left[1+\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_1^1}\right]+\left[N_1 a_1^1+N_2 a_2^1\right]\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_1^1}\right]\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_i^1}$$

Soit : $\frac{\partial^2 W^1}{\partial \left(a_1^1\right)^2} < 0 \Leftrightarrow -N_1\left(1+\psi_1-\widetilde{\psi}\right)\left[1+\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_1^1}\right]+\left[N_1 a_1^1+N_2 a_2^1\right]\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_1^1} > 0$

Ou : $N_1\left(1-\left(\widetilde{\psi}-\psi_1\right)\right) < \left[N_1 a_1^1+N_2 a_2^1-N_1\left(1-\left(\widetilde{\psi}-\psi_1\right)\right)\right]\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_1^1}$

Or, l'expression de maximisation de W^1 en a_1^1 implique :

$\left[N_1 a_1^1+N_2 a_2^1\right]\left(1+\psi_1-\widetilde{\psi}\right)\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_i^1} = r_1^1+\frac{N_1}{2}\left[\widetilde{\psi}^2-2\left(1+\psi_1\right)\widetilde{\psi}+2\psi_1^2\right] > 0$

Donc, $\left[N_1 a_1^1+N_2 a_2^1\right]\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_i^1} > r_1^1+\frac{N_1}{2}\left[\widetilde{\psi}^2-2\left(1+\psi_1\right)\widetilde{\psi}+2\psi_1^2\right]$

Comparons : $r_1^1+\frac{N_1}{2}\left[\widetilde{\psi}^2-2\left(1+\psi_1\right)\widetilde{\psi}+2\psi_1^2\right]$ avec $N_1\left(1+\psi_1-\widetilde{\psi}\right)\left[1+\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_1^1}\right]$

Soit : $2t\left(\psi_2-\psi_1\right)r_1^1+t\left(\psi_2-\psi_1\right)N_1\left[\left(\widetilde{\psi}-\psi_1\right)^2+\left(1-\psi_1\right)^2-3\right] > \delta N_1\left(1-\left(\widetilde{\psi}-\psi_1\right)\right)$

Avec : $\left(\widetilde{\psi}-\psi_1\right)^2+\left(1-\psi_1\right)^2-3 < 2\left(1-\psi_1\right)^2-3 < 0$

C Démonstration des propositions 2 et 3

C.1 Maximiser W^1 en a_1^1

$\frac{\partial W^1}{\partial a_1^1} = 0$ ou :

$\frac{\partial W^1}{\partial a_1^1} = -\frac{N_1}{2}\left[\widetilde{\psi}^2-2\left(1+\psi_1\right)\widetilde{\psi}+2\psi_1^2\right]+\left[N_1 a_1^1+N_2 a_2^1\right]\left[1+\psi_1-\widetilde{\psi}\right]\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_i^1}-r_1^1 = 0$

Soit :

$N_1\left[\widetilde{\psi}^2-2\left(1+\psi_1\right)\widetilde{\psi}+2\psi_1^2\right]-2\left[N_1a_1^1+N_2a_2^1\right]\left[1+\psi_1-\widetilde{\psi}\right]\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_1^1}+2r_1^1=$
0

Nous avons donc : $\frac{\partial W^1}{\partial a_1^1}=0\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
& 3N_1\delta^2\left(a_1^1\right)^2 \\
& -2\delta a_1^1\left[2\delta N_1 a_\cdot^2-2tN_1\left(\psi_2-\psi_1\right)\left(2+\psi_1-\psi_2\right)-\delta\left(2N_1+N_2\right)a_2^1\right] \\
& +\left(N_1+2N_2\right)\delta^2\left(a_2^1\right)^2-2\delta a_2^1\left(N_1+N_2\right)\left[\delta a_\cdot^2-t\left(\psi_2-\psi_1\right)\left(2+\psi_1-\psi_2\right)\right] \\
& +N_1\delta^2\left(a_\cdot^2\right)^2-2a_\cdot^2N_1t\delta\left(\psi_2-\psi_1\right)\left(2+\psi_1-\psi_2\right) \\
& -N_1t^2\left(\psi_2-\psi_1\right)^2\left[4\left(\psi_1+\psi_2\right)-4\psi_1^2-\left(\psi_1-\psi_2\right)^2\right] \\
& +8t^2\left(\psi_2-\psi_1\right)^2r_1^1 \\
= & \; 0
\end{aligned}$$

Cette condition peut se réécrire ainsi :

$$F_1\left(a_1^1\right)^2-2a_1^1G_1+H_{12}\left(a_2^1\right)^2-2G_{12}a_2^1+P_1\left(a_\cdot^2\right)+Q_1^1=0 \qquad (7)$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{c}
F_1=3N_1\delta^2 \\
G_1=\delta\left[2\delta N_1a_\cdot^2-2tN_1\left(\psi_2-\psi_1\right)\left(2+\psi_1-\psi_2\right)-\delta\left(2N_1+N_2\right)a_2^1\right] \\
H_{12}=\delta^2(N_1+2N_2)=\delta^2(N+N_2) \\
G_{12}=\delta(N_1+N_2)[\delta a_\cdot^2-t(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)] \\
P_1(a_\cdot^2)=\delta N_1a_\cdot^2[\delta a_\cdot^2-2t(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)] \\
Q_1^1=-N_1t^2(\psi_2-\psi_1)^2[4(\psi_1+\psi_2)-(\psi_2-\psi_1)^2-4\psi_1^2]+8t^2(\psi_2-\psi_1)^2r_1^1
\end{array}\right.$$

Nous obtenons ainsi :

$$\left(a_1^1\right)^{-,+}=\frac{G_1\pm\sqrt{G_1^2-F_1\left(H_{12}\left(a_2^1\right)^2-2G_{12}a_2^1+P_1\left(a_\cdot^2\right)+Q_1^1\right)}}{F_1}$$

C.2 Maximiser W^1 en a_2^1 :

$\frac{\partial W^1}{\partial a_2^1}=0$ ou :

$$
\begin{aligned}
& 3N_2\delta^2\left(a_2^1\right)^2 \\
& -2\delta a_2^1\left[2\delta N_2 a_\cdot^2 - 2tN_2\left(\psi_2-\psi_1\right)\left(2+\psi_1-\psi_2\right)-\delta\left(2N_2+N_1\right)a_1^1\right] \\
& +\left(2N_1+N_2\right)\delta^2\left(a_1^1\right)^2 - 2\delta a_1^1\left(N_2+N_1\right)\left[\delta a_\cdot^2 - t\left(\psi_2-\psi_1\right)\left(2+\psi_1-\psi_2\right)\right] \\
& +N_2\delta^2\left(a_\cdot^2\right)^2 - 2a_\cdot^2 N_2 t\delta\left(\psi_2-\psi_1\right)\left(2+\psi_1-\psi_2\right) \\
& -N_2t^2\left(\psi_2-\psi_1\right)^2\left[4\left(\psi_1+\psi_2\right)-4\psi_1^2-\left(\psi_1-\psi_2\right)^2\right] \\
& +8t^2\left(\psi_2-\psi_1\right)^2 r_2^1 \\
= {} & 0
\end{aligned}
$$

Soit :

$$
F_2\left(a_2^1\right)^2 - 2a_2^1 G_2 + H_{21}\left(a_1^1\right)^2 - 2G_{21}a_1^1 + P_2\left(a_\cdot^2\right) + Q_2^1 = 0 \qquad (8)
$$

avec :

$$
\left\{
\begin{array}{c}
F_2 = 3N_2\delta^2 \\
G_2 = \delta[2\delta N_2 a_\cdot^2 - \delta(N_1+2N_2)a_1^1 - 2tN_2(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)] \\
H_{21} = \delta^2(2N_1+N_2) = \delta^2(N_1+N) \\
G_{21} = \delta(N_1+N_2)[\delta a_\cdot^2 - t(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)] = G_{12} \\
P_2(a_\cdot^2) = \delta N_2 a_\cdot^2[\delta a_\cdot^2 - 2t(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)] \\
Q_2^1 = -N_2t^2(\psi_2-\psi_1)^2[4(\psi_1+\psi_2)-(\psi_2-\psi_1)^2-4\psi_1^2] + 8t^2(\psi_2-\psi_1)^2 r_2^1
\end{array}
\right.
$$

Nous obtenons ainsi les solutions suivantes :

$$
a_2^1 = \frac{G_2 \pm \sqrt{G_2^2 - F_2\left(H_{21}\left(a_1^1\right)^2 - 2G_{21}a_1^1 + P_2\left(a_\cdot^2\right) + Q_2^1\right)}}{F_2}
$$

C.3 Maximiser W^2 en a_1^2 et en a_2^2

Dans le cas particulier où $\alpha = 1$, alors :

$\frac{\partial W^2}{\partial a_1^2} = \frac{N_1}{2}\left[2\left(\psi_2-\widetilde{\psi}\right)\left(1-\psi_2\right)+1-\widetilde{\psi}^2\right] - 2\left[\frac{N_1a_1^2+N_2a_2^2}{2}\right]\left(\widetilde{\psi}+1-\psi_2\right)\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial a_1^2} -$
r_1^2

Nous obtenons :

$\frac{\partial W^2}{\partial a_1^2} = 0$

$\Leftrightarrow N_1 \left[2\left(\psi_2 - \widetilde{\psi}\right)(1-\psi_2) + 1 - \widetilde{\psi}^2\right] - 2\left[N_1 a_1^2 + N_2 a_2^2\right]\left(\widetilde{\psi} + 1 - \psi_2\right)\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial a_1^2} - 2r_1^2 = 0$

En remplaçant $\widetilde{\psi}$ et $\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial a_1^2}$ par leurs expressions respectives, l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
& 3N_1\delta^2\left(a_1^2\right)^2 \\
& -2\delta a_1^2\left[2\delta N_1 a_\cdot^1 - 2tN_1(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2) - \delta(2N_1+N_2)a_2^2\right] \\
& +(N_1+2N_2)\delta^2\left(a_2^2\right)^2 - 2\delta a_2^2(N_1+N_2)\left[\delta a_\cdot^1 - t(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)\right] \\
& +N_1\delta^2\left(a_\cdot^1\right)^2 - 2a_\cdot^1 N_1 t\delta(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2) \\
& -N_1 t^2(\psi_2-\psi_1)^2\left[4(1-\psi_2)(\psi_2-\psi_1) + 4 - (\psi_1-\psi_2)^2\right] \\
& +8t^2(\psi_2-\psi_1)^2 r_1^2 \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire l'expression ainsi :

$$K_1\left(a_1^2\right)^2 - 2a_1^2 L_1 + M_{12}\left(a_2^2\right)^2 - 2L_{12}a_2^2 + S_1\left(a_\cdot^1\right) + T_1^2 = 0 \qquad (9)$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{c}
K_1 = 3N_1\delta^2 = F_1 \\
L_1 = \delta[2\delta N_1 a_\cdot^1 - \delta(2N_1+N_2)a_2^2 - 2tN_1(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)] \\
M_{12} = \delta^2(N_1+2N_2) = H_{12} \\
L_{12} = \delta(N_1+N_2)[\delta a_\cdot^1 - t(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)] \\
S_1(a_\cdot^1) = \delta N_1 a_\cdot^1[\delta a_\cdot^1 - 2t(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)] \\
T_1^2 = -N_1t^2(\psi_2-\psi_1)^2[4(\psi_2-\psi_1)(1-\psi_2)+4-(\psi_1+\psi_2)^2] + 8t^2(\psi_2-\psi_1)^2 r_1^2
\end{array}\right.$$

Nous obtenons ici :

$$\left(a_1^2\right)^{-,+} = \frac{L_1 \pm \sqrt{(L_1)^2 - K_1\left[M_{12}\left(a_2^2\right)^2 - 2L_{12}a_2^2 + S_1\left(a_\cdot^1\right) + T_1^2\right]}}{K_1}$$

Par symétrie, nous pouvons en déduire que :

$$K_2\left(a_2^2\right)^2-2a_2^2L_2+M_{21}\left(a_1^2\right)^2-2L_{21}a_1^2+S_2\left(a_{\cdot}^1\right)+T_2^2=0 \tag{10}$$

D'où :

$$\left(a_2^2\right)^{-,+}=\frac{L_2\pm\sqrt{\left(L_2\right)^2-K_2\left[M_{22}\left(a_1^2\right)^2-2La_1^2+S_2\left(a_{\cdot}^1\right)+T_2^2\right]}}{K_2}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{c}
K_2=F_2=3N_2\delta^2\\
L_2=\delta[2\delta N_2a_{\cdot}^1-\delta(N_1+2N_2)a_1^2-2tN_2(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)]\\
M_{21}=\delta^2(2N_1+N_2)\\
L_{21}=L_{12}=\delta(N_1+N_2)[\delta a_{\cdot}^1-t(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2]\\
S_2(a_{\cdot}^1)=\delta N_2a_{\cdot}^1[\delta a_{\cdot}^1-2t(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)]\\
T_2^2=-N_2t^2(\psi_2-\psi_1)^2[4(\psi_2-\psi_1)(1-\psi_2)+4-(\psi_1+\psi_2)^2]+8t^2(\psi_2-\psi_1)^2r_2^2
\end{array}\right.$$

D Résultats pour la somme des investissements des annonceurs

Nous cherchons ici à combiner les équations (C.1) et (C.2) :

$$\left\{\begin{array}{l}
F_1\left(a_1^1\right)^2-2a_1^1G^1+H_{12}\left(a_2^1\right)^2-2Ga_2^1+P_1\left(a_{\cdot}^2\right)+Q_1^1=0\\
F_2\left(a_2^1\right)^2-2a_2^1G^2+H_{21}\left(a_1^1\right)^2-2Ga_1^1+P_2\left(a_{\cdot}^2\right)+Q_2^1=0
\end{array}\right.$$

Le système d'équations ci-dessus peut se réécrire ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l}
3N_1\delta^2\left(a_1^1\right)^2-2a_1^1G^1+H_{12}\left(a_2^1\right)^2-2Ga_2^1+P_1\left(a_{\cdot}^2\right)+Q_1=0\\
3N_2\delta^2\left(a_2^1\right)^2-2a_2^1G^2+H_{21}\left(a_1^1\right)^2-2Ga_1^1+P_2\left(a_{\cdot}^2\right)+Q_2=0
\end{array}\right.$$

En soustrayant la seconde égalité de la première, nous obtenons :

$$\left[3N_1\delta^2 - H_{21}\right]\left(a_1^1\right)^2 - \left[3N_2\delta^2 - H_{12}\right]\left(a_2^1\right)^2 + 2\left(G_{21} - G^1\right)a_1^1 - 2\left(G_{12} - G^2\right)a_2^1$$
$$+P_1(a_\cdot^2) - P_2(a_\cdot^2) + Q_1^1 - Q_2^1 = 0$$

Soit :

$$\left(N_1 - N_2\right)\delta^2\left(a_1^1 + a_2^1\right)^2 - 2\delta^2\left(N_1 - N_2\right)\left(a_2^1 + a_1^1\right)a_\cdot^2$$
$$+2\left(N_1 - N_2\right)\delta t\left(\psi_2 - \psi_1\right)\left(2 + \psi_1 - \psi_2\right)\left(a_1^1 + a_2^1\right)$$
$$+\left(N_1 - N_2\right)\delta a_\cdot^2\left[\delta a_\cdot^2 - 2t\left(\psi_2 - \psi_1\right)\left(2 + \psi_1 - \psi_2\right)\right] + 8t^2\left(\psi_2 - \psi_1\right)^2\left(r_1^1 - r_2^1\right)$$
$$-\left(N_1 - N_2\right)t^2\left(\psi_2 - \psi_1\right)^2\left[4\left(\psi_1 + \psi_2\right) - 4\psi_1^2 - \left(\psi_1 - \psi_2\right)^2\right] = 0$$

Si nous supposons que $N_1 \neq N_2$:

$$\delta^2\left(a_\cdot^1\right)^2 - 2\delta a_\cdot^1\left[\delta a_\cdot^2 - t\left(\psi_2 - \psi_1\right)\left(2 + \psi_1 - \psi_2\right)\right]$$
$$+\delta a_\cdot^2\left[\delta a_\cdot^2 - 2t\left(\psi_2 - \psi_1\right)\left(2 + \psi_1 - \psi_2\right)\right]$$
$$+t^2\left(\psi_2 - \psi_1\right)^2\left[8\left(\frac{r_1^1 - r_2^1}{N_1 - N_2}\right) - \left[4\left(\psi_1 + \psi_2\right) - 4\psi_1^2 - \left(\psi_1 - \psi_2\right)^2\right]\right] = 0$$

Ce qui peut également s'écrire :

$$\delta^2\left(a_\cdot^1\right)^2 - 2\delta\left[\delta a_\cdot^2 - C\right]a_\cdot^1 + \delta\left(\delta\left(a_\cdot^2\right)^2 - 2Ca_\cdot^2\right) + \Omega_1 = 0 \qquad (11)$$

avec :

$$C = t\left(\psi_2 - \psi_1\right)\left(2 + \psi_1 - \psi_2\right)$$

$$\Omega_1 = t^2\left(\psi_2 - \psi_1\right)^2\left[8\left(\frac{r_1^1 - r_2^1}{N_1 - N_2}\right) - \left[4\left(\psi_1 + \psi_2\right) - 4\psi_1^2 - \left(\psi_1 - \psi_2\right)^2\right]\right]$$

En procédant de même avec les équations (C.3) et (C.4), nous obtenons ainsi le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} K_1\left(a_1^2\right)^2 - 2L_1a_1^2 + M_{12}\left(a_2^2\right)^2 - 2La_2^2 + S_1\left(a_\cdot^1\right) + T_1^2 = 0 \\ K_2\left(a_2^2\right)^2 - 2L_2a_2^2 + M_{21}\left(a_1^2\right)^2 - 2La_1^2 + S_2\left(a_\cdot^2\right) + T_2^2 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde égalité de la première, nous obtenons :

$$\left[3N_1\delta^2 - M_{21}\right]\left(a_1^2\right)^2 - \left[3N_2\delta^2 - M_{12}\right]\left(a_2^2\right)^2 + 2\left(L_{21} - L_1\right)a_1^2 - 2\left(L_{12} - L_2\right)a_2^2$$
$$+S_1(a_.^1) - S_2(a_.^1) + T_1^2 - T_2^2 = 0$$

Soit :

$$\left(N_1 - N_2\right)\delta^2\left(a_.^2\right)^2 + 2\delta t\left(\psi_2 - \psi_1\right)\left(2 + \psi_1 - \psi_2\right)\left(N_1 - N_2\right)a_.^2$$
$$-2\left(N_1 - N_2\right)\delta^2 a_.^2 a_.^1 + \left(N_1 - N_2\right)\delta a_.^1\left[\delta a_.^1 - 2t\left(\psi_2 - \psi_1\right)\left(2 + \psi_1 - \psi_2\right)\right]$$
$$-\left(N_1 - N_2\right)\left(\psi_2 - \psi_1\right)^2 t^2[4(\psi_2 - \psi_1)(1 - \psi_2) + 4 - (\psi_1 + \psi_2)^2]$$
$$+8t^2\left(\psi_2 - \psi_1\right)^2\left(r_1^2 - r_2^2\right) = 0$$

Si nous supposons que $N_1 \neq N_2$, l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$\delta^2\left(a_.^2\right)^2 - 2\delta a_.^2\left[\delta a_.^1 - t\left(\psi_2 - \psi_1\right)\left(2 + \psi_1 - \psi_2\right)\right]$$
$$+\delta a_.^1\left[\delta a_.^1 - 2t\left(\psi_2 - \psi_1\right)\left(2 + \psi_1 - \psi_2\right)\right]$$
$$-t^2\left(\psi_2 - \psi_1\right)^2[4(\psi_2 - \psi_1)(1 - \psi_2) + 4 - (\psi_1 + \psi_2)^2]$$
$$+8t^2\left(\psi_2 - \psi_1\right)^2\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{N_1 - N_2}\right) = 0$$

Comme précédemment, elle peut être exprimée ainsi :

$$\delta^2\left(a_.^2\right)^2 - 2\delta\left[\delta a_.^1 - C\right]a_.^2 + \delta\left(\delta\left(a_.^1\right)^2 - 2Ca_.^1\right) + \Omega_2 = 0 \qquad (12)$$

avec C défini auparavant et :

$$\Omega_2 = t^2(\psi_2 - \psi_1)^2[8(\frac{r_1^2 - r_2^2}{N_1 - N_2}) - [4(\psi_2 - \psi_1)(1 - \psi_2) + 4 - (\psi_1 + \psi_2)^2]$$

Avec (C.5) et (C.6), nous obtenons donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \delta^2\left(a_.^1\right)^2 - 2\delta\left[\delta a_.^2 - C\right]a_.^1 + \delta\left(\delta\left(a_.^2\right)^2 - 2Ca_.^2\right) + \Omega_1 = 0 \\ \delta^2\left(a_.^2\right)^2 - 2\delta\left[\delta a_.^1 - C\right]a_.^2 + \delta\left(\delta\left(a_.^1\right)^2 - 2Ca_.^1\right) + \Omega_2 = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} a_.^1 = \frac{a_.^2 - C + \sqrt{C^2 - \Omega_1}}{\delta} \\ a_.^2 = \frac{a_.^1 - C + \sqrt{C^2 - \Omega_2}}{\delta} \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\delta a_{\cdot}^{1} &= a_{\cdot}^{2} - C + \sqrt{C^{2} - \Omega_{1}} \\
&= \frac{a_{\cdot}^{1} - (1+\delta) C + \sqrt{C^{2} - \Omega_{2}} + \delta\sqrt{C^{2} - \Omega_{1}}}{\delta}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
a_{\cdot}^{1} &= \left(\frac{1}{1-\delta}\right) C + \frac{\sqrt{C^{2} - \Omega_{2}} + \delta\sqrt{C^{2} - \Omega_{1}}}{\delta^{2} - 1} \\
a_{\cdot}^{2} &= \left(\frac{1}{1-\delta}\right) C + \frac{\sqrt{C^{2} - \Omega_{1}} + \delta\sqrt{C^{2} - \Omega_{2}}}{\delta^{2} - 1}
\end{aligned}$$

En remplaçant C, Ω_1 et Ω_2 par leurs valeurs respectives, $a_{\cdot}^{1}$ par exemple peut s'écrire :

$$a_{\cdot}^{1} = \frac{t(\psi_2 - \psi_1)}{\delta^2 - 1} \left[\begin{array}{c} (\psi_2 - \psi_1 - 2)(1+\delta) \\ +2\sqrt{2 - \psi_2^2 - 2\left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{N_1 - N_2}\right)} + 2\delta\sqrt{1 + \psi_1(2 - \psi_1) - 2\left(\frac{r_1^1 - r_2^1}{N_1 - N_2}\right)} \end{array} \right]$$

E Identification de la solution intérieure en a_i^j

Nous cherchons à montrer qu'il existe une solution intermédiaire en a_i^j lorsque les prix et les parts de marché des médias $i = 1, 2$ sont identiques, i.e. lorsque $N_1 = N_2$ et $r_1^1 = r_2^1$.

Nous cherchons par exemple $(a_2^1)^*$ tel que $\frac{\partial W^1}{\partial a_1^1} = 0$ et $\frac{\partial W^1}{\partial a_2^1} = 0$, soit tel que $W_1^1 = 0$ et $W_2^1 = 0$.

La procédure pourrait être identique avec $(a_1^1)^*$ tel que $W_1^1 = 0$ et $W_2^1 = 0$.

Nous avons vu que $(a_2^1)^* \mid_{W_2^1 = 0} = \frac{G_2 \pm \sqrt{G_2^2 - F_2\left(H_{21}\left(a_1^1\right)^2 - 2G_{21}a_1^1 + P_2\left(a_{\cdot}^2\right) + Q_2^1\right)}}{F_2}$

Lorsque $N_1 = N_2 = n$ et $r_1^1 = r_2^1 = r^1$, alors :

$$\begin{cases} F_2 = 3n\delta^2 = F_1 \\ G_2 = \delta n[2\delta a_.^2 - 3\delta a_1^1 - 2t(\psi_2 - \psi_1)(2 + \psi_1 - \psi_2)] \\ H_{21} = 3\delta^2 n = H_{12} = F_1 = F_2 \\ G_{21} = 2\delta n[\delta a_.^2 - t(\psi_2 - \psi_1)(2 + \psi_1 - \psi_2)] = G_{12} \\ P_2(a_.^2) = \delta n a_.^2[\delta a_.^2 - 2t(\psi_2 - \psi_1)(2 + \psi_1 - \psi_2)] = P_1(a_.^2) \\ Q_2^1 = nt^2(\psi_2 - \psi_1)^2[(\psi_2 - \psi_1)^2 - 4(\psi_1 + \psi_2) + 4\psi_1^2] + 8t^2(\psi_2 - \psi_1)^2 r^1 = Q_1^1 \end{cases}$$

Nous pouvons calculer que :

$$(a_2^1)^* \mid_{W_1^1=0} = \frac{Z_1 \pm \sqrt{Z_1^2 - H_{12}\left(F_1\left(a_1^1\right)^2 - 4a_1^1\delta N_1[\delta a_.^2 - t(\psi_2 - \psi_1)(2 + \psi_1 - \psi_2)] + P_1\left(a_.^2\right) + Q_1^1\right)}}{H_{12}}$$

avec $Z_1 = \delta[(N_1 + N_2)(\delta a_.^2 - t(\psi_2 - \psi_1)(2 + \psi_1 - \psi_2)) - \delta(2N_1 + N_2)a_1^1]$

Lorsque $N_1 = N_2 = n$ et $r_1^1 = r_2^1 = r^1$, alors :

$Z_1 = \delta[2n(\delta a_.^2 - t(\psi_2 - \psi_1)(2 + \psi_1 - \psi_2)) - 3\delta n a_1^1] = G_2$

Nous obtenons donc :

$$(a_2^1)^* \mid_{W_1^1=0} = \frac{G_2 \pm \sqrt{G_2^2 - F_2\left(H_{21}\left(a_1^1\right)^2 - 2G_{21}a_1^1 + P_2\left(a_.^2\right) + Q_2^1\right)}}{F_2} = (a_2^1)^* \mid_{W_2^1=0}$$

De la même manière, lorsque $N_1 = N_2 = n$ et $r_1^2 = r_2^2 = r^2$, alors :

$$(a_2^2)^* \mid_{W_2^2=0} = \frac{L_2 \pm \sqrt{(L_2)^2 - K_2\left[M_{21}\left(a_1^2\right)^2 - 2L_{21}a_1^2 + S_2\left(a_.^1\right) + T_2^2\right]}}{K_2}$$

avec :

$$\begin{cases} K_2 = 3n\delta^2 = K_1 \\ L_2 = \delta n[2\delta a_.^1 - 3\delta a_1^2 - 2t(\psi_2 - \psi_1)(2 + \psi_1 - \psi_2)] \\ M_{21} = 3n\delta^2 = M_{12} = K_2 = K_1 \\ L_{21} = L_{12} = 2\delta n[\delta a_.^1 - t(\psi_2 - \psi_1)(2 + \psi_1 - \psi_2)] \\ S_2(a_.^1) = \delta n a_.^1[\delta a_.^1 - 2t(\psi_2 - \psi_1)(2 + \psi_1 - \psi_2)] = S_1(a_.^1) \\ T_2^2 = -nt^2(\psi_2 - \psi_1)^2[4(\psi_2 - \psi_1)(1 - \psi_2) + 4 - (\psi_1 + \psi_2)^2] + 8t^2(\psi_2 - \psi_1)^2 r^2 = T_1^2 \end{cases}$$

Nous pouvons calculer que :

$$(a_2^2)^* \mid_{W_1^2=0} = \frac{Z_2 \pm \sqrt{Z_2^2 - M_{12}\left(K_1\left(a_1^2\right)^2 - 4a_1^2\delta n[\delta a_\cdot^2 - t(\psi_2-\psi_1)(2+\psi_1-\psi_2)] + S_1\left(a_\cdot^2\right) + T_1^2\right)}}{M_{12}}$$

avec $Z_2 = \delta[2n(\delta a_\cdot^1 - t(\psi_2 - \psi_1)(2 + \psi_1 - \psi_2)) - 3\delta n a_2^1] = L_2$

Nous obtenons donc :

$$(a_2^2)^* \mid_{W_1^2=0} = \frac{L_2 \pm \sqrt{(L_2)^2 - K_2\left[M_{21}\left(a_1^2\right)^2 - 2L_{21}a_1^2 + S_2\left(a_\cdot^1\right) + T_2^2\right]}}{K_2} = (a_2^2)^* \mid_{W_2^2=0}$$

Par ailleurs, nous montrons que les rétributions des annonceurs sont identiques à ces valeurs d'équilibre.

Nous calculons, lorsque $N_1 = N_2 = n$, $r_1^1 = r_2^1 = r^1$ et $(a_2^1)^* \mid_{W_1^1=0} = (a_2^1)^* \mid_{W_2^1=0}$:

$$\begin{aligned}
&W_1 \mid_{W_1^1=0} - W_1 \mid_{W_2^1=0} \\
&= n[a_1^1 + (a_2^1)^* \mid_{W_1^1=0}][(1+\psi_1)\widetilde{\psi} - \tfrac{1}{2}\widetilde{\psi}^2 - \psi_1^2] - r^1[a_1^1 + (a_2^1)^* \mid_{W_1^1=0}] \\
&- n[a_1^1 + (a_2^1)^* \mid_{W_2^1=0}][(1+\psi_1)\widetilde{\psi} - \tfrac{1}{2}\widetilde{\psi}^2 - \psi_1^2] - r^1[a_1^1 + (a_2^1)^* \mid_{W_2^1=0}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

De même, lorsque $N_1 = N_2 = n$, $r_1^2 = r_2^2 = r^2$ et $(a_2^2)^* \mid_{W_1^2=0} = (a_2^2)^* \mid_{W_2^2=0}$:

$$\begin{aligned}
&W_2 \mid_{W_1^2=0} - W_2 \mid_{W_2^2=0} \\
&= \tfrac{n}{2}[a_1^2 + (a_2^2)^* \mid_{W_1^2=0}][2(\psi_2 - \widetilde{\psi})(1-\psi_2) + 1 - \widetilde{\psi}^2] - r^2[a_1^2 + (a_2^2)^* \mid_{W_1^2=0}] \\
&- \tfrac{n}{2}[a_1^2 + (a_2^2)^* \mid_{W_2^2=0}][2(\psi_2 - \widetilde{\psi})(1-\psi_2) + 1 - \widetilde{\psi}^2] - r^2[a_1^2 + (a_2^2)^* \mid_{W_2^2=0}] \\
&= 0
\end{aligned}$$